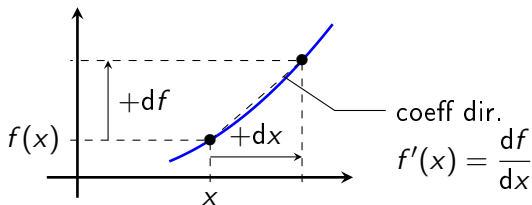
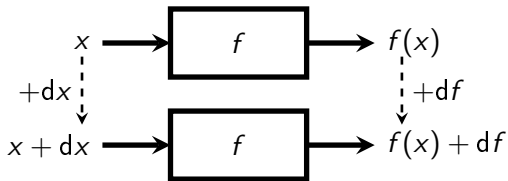


Dérivation – partie 2

I. En physique



Variation d'une petite quantité dx en entrée $\Rightarrow$ variation df en sortie.
 Quand $dx \rightarrow 0$, df est **proportionnel** à dx . **Par définition**, le facteur de proportionnalité est $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \Leftrightarrow df = f'(x) \cdot dx \quad \text{au premier ordre}$$

$$df = f'(x) \cdot dx$$

$\frac{df}{dx}$ est une fraction ordinaire, on peut donc multiplier des deux côtés par dx et obtenir :

$$df = f'(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx$$

C'est une égalité tant que $dx \rightarrow 0$, est infinitésimal.

$$\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

est une approximation valable tant que $\Delta x \approx 0$.

Cette approximation revient à dire que la tangente approxime la courbe.

Notion de premier ordre

Prenons un exemple : $f(x) = 5x^2 + 6x - 4$

Pour calculer $f(x + dx)$, on remplace x par $x + dx$:

$$f(x + dx) = 5(x + dx)^2 + 6(x + dx) - 4$$

Tous calculs faits :

$$f(x + dx) = \underbrace{5x^2 + 6x - 4}_{f(x)} + \underbrace{(10x + 6)}_{f'(x)} dx + \underbrace{5dx^2}_{\text{negligeable pour } dx \ll 1}$$

La définition $f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$ revient à considérer dx^2 comme négligeable devant dx . En effet, si dx très petit (par ex. 0,01), dx^2 l'est encore plus (par ex. $0,01^2 = 0,0001$).

f ou $f(x)$?

Les physiciens ne notent pas toujours les (x) pour diverses raisons :

- Il n'est pas toujours évident de savoir qui est fonction de qui. Dans $U = R \times I$ est-ce U qui est fonction de I où I qui est fonction de U ? Cela dépend des fois.
- Il est fréquent en physiques qu'une quantité dépendent de **plusieurs** autres. Il est alors un peu lourd d'écrire par exemple $f(x, y, z)$.

II. D'autres formules

Dérivée du produit : $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

La notation des physiciens permet de faire des calculs plus naturellement.
Commençons par $w(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\begin{aligned}w(x + dx) &= u(x + dx) \cdot v(x + dx) \\&= [u(x) + u'(x) \cdot dx] \cdot [v(x) + v'(x) \cdot dx] \\&= u(x) \cdot v(x) + [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] dx + [\dots] (dx)^2\end{aligned}$$

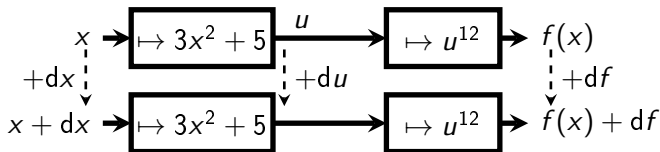
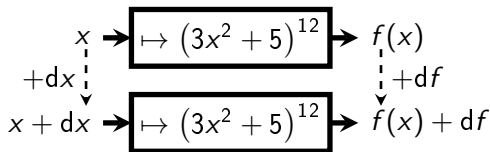
Comme $dx \rightarrow 0$, alors $(dx)^2$ est encore plus petit et peut-être négligé (*cela peut être formulé avec plus de rigueur mais l'idée est là*)

On en déduit

$$w' = [u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Connaître par cœur...

Composition



$$dx \xrightarrow{\times \frac{df}{dx}} df \quad \text{devient} \quad dx \xrightarrow[\textcolor{blue}{u'=6x}]{\times \frac{du}{dx}} du \xrightarrow[\textcolor{red}{12 u^{11}}]{\times \frac{df}{du}} df$$

$$\text{Soit : } \frac{df}{dx} = \frac{\textcolor{blue}{du}}{\textcolor{blue}{dx}} \cdot \frac{\textcolor{red}{df}}{\textcolor{red}{du}} = \textcolor{blue}{6x} \cdot \textcolor{red}{12 u^{11}} = 6x \cdot (3x^2 + 5)^{11}$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

La page qui précède permet de justifier la formule :

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

Mais cette formule peut facilement embrouiller : qu'est-ce que f exactement dans un problème ?

Si je dis $f(x) = (x^2 + 1)^3$ est-ce que c'est le f de la formule ? **Non.**

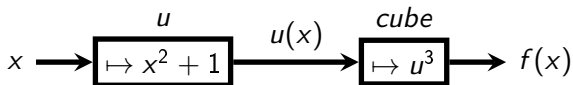
La formule est souvent donnée comme cela ou en version plus compliquée. Il serait peut-être mieux parfois d'écrire :

$$[machin(u)]' = u' \cdot machin'(u)$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

Exemple : $f(x) = (x^2 + 1)^3$



On remarque que $f(x)$ consiste en deux calculs qui s'enchaînent.

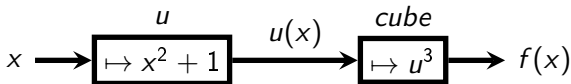
$$f(x) = \text{cube}(u) \quad \text{avec } u = x^2 + 1$$

Et alors le f de la formule en haut, c'est *cube*.

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

Exemple : $f(x) = (x^2 + 1)^3$



$$[f(x)]' = f'(x) = [cube(u)]' = u' \cdot cube'(u)$$

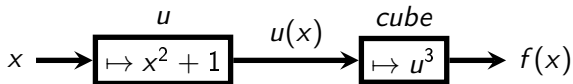
- $u = u(x) = x^2 + 1$ donc $u' = u'(x) = 2x$.
- $cube(x) = x^3$ donc $cube'(x) = 3x^2$ et de la même façon $cube'(u) = 3u^2$.

$$f'(x) = 2x \cdot 3u^2 = 2x \cdot 3(x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

$$[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$$

Exemple : $f(x) = (x^2 + 1)^3$



Ce qu'il faut bien retenir de l'exemple, c'est que $[cube(u)]'$ et $cube'(u)$, ce n'est pas la même chose.

- Dans $cube'(u)$, le u n'est pas concerné par la dérivation.
- Dans $[cube(u)]'$, le u est concerné par la dérivation. L'effet est de faire sortir u' devant : $[cube(u)]' = u' \cdot cube'(u)$.
- Vous devez comprendre que $cube$ n'est qu'un exemple. C'est vrai avec tout.

$$[machin(u)]' = u' \cdot machin'(u)$$

De cette formule, on en déduit beaucoup d'autres :

$$[u^n]' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$[e^u]' = u' \cdot e^u \quad \text{et} \quad [\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

$$\left[\frac{1}{u}\right]' = -\frac{u'}{u^2}$$

et des formules $\left[\frac{1}{u}\right]'$ et $[u \cdot v]'$ on déduit :

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Exercice 1 : calcul de dérivées composées

Même si nous n'avons pas encore révisé $\exp$, je vous rappelle que $\exp(x)$ peut se noter aussi e^x et que $[\exp(x)]' = \exp(x)$ et enfin que $[\exp(u)]' = u' \cdot \exp(u)$.

Donnez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = (x - 1) \cdot \exp(x)$

c) $f(x) = \frac{x + 7}{4x + 1}$

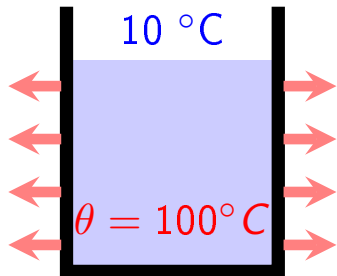
d) $f(x) = (x + 2)^7$

e) $f(t) = 4 \exp\left(-\frac{t}{2} + 1\right)$

III. Pourquoi des équation différentielles ?

Nous allons voir un exemple concret, pas trop compliqué, dans lequel on va faire des hypothèses raisonnables. Ces hypothèses vont nous amener à poser une équation d'un genre spéciale, une **équation différentielle**.

Exemple



Un récipient contient de l'eau à 100 °C.
L'air ambiant est à 10 °C. Comment évolue θ en fonction du temps ?

En physique on dira, qu'en un temps très court dt , la température θ va varier d'une petite quantité $d\theta$. On fait l'hypothèse que $d\theta$ est :

- négatif, (la température baisse)
- proportionnel à la durée dt ,
- proportionnel à l'écart $\theta - 10$.

$$d\theta = -K \cdot (\theta - 10) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \theta' = -K \cdot (\theta - 10) \quad \text{équation différentielle!}$$

Exercice 2 : Exploitation d'un modèle

On a donné des arguments pour justifier l'équation différentielle :

$$\theta'(t) = -K \cdot (\theta(t) - 10) \quad \text{avec } \theta(0) = 100$$

On peut en déduire (*cours plus tard...*) que cette équation aboutit à :

$$\theta(t) = 10 + 90e^{-Kt}$$

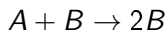
On imagine que K dépend de la forme du verre, de sa taille, du matériau utilisé... Le but de cet exercice est de déterminer par l'expérience une valeur de K . Il faut bien sûr tenir compte du fait que lors de l'expérience, les mesures peuvent occasionner des erreurs. **On obtient :**

t en min	0	1	2	5	10	15	20	30	35
$\theta(t)$ en $^{\circ}\text{C}$	100	91	83	64	43	30	22	14	12

En faisant le changement de variable $z = \ln\left(\frac{\theta-10}{90}\right)$, trouvez K .

Exercice 3 : poser une équation différentielle

On s'intéresse à une réaction d'**auto-catalyse**.



- Au début de la réaction, la solution ne contient presque que des molécules de type A , très peu de B .
- À mesure que la réaction se produit, les A disparaissent jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des B .

On note $[A]$ et $[B]$ les concentrations de A et B . Ce sont des fonctions du temps t . On peut remarquer que $[A] + [B] = C$, une certaine constante.

À un instant t donné, on se donne un temps dt très court. Pendant ce temps, la concentration $[A]$ va changer d'une quantité $d[A]$.

- a) Selon vous, de quoi va dépendre $d[A]$?
- b) Proposez une formule simple pour $d[A]$.
- c) Déduisez-en une équation différentielle.