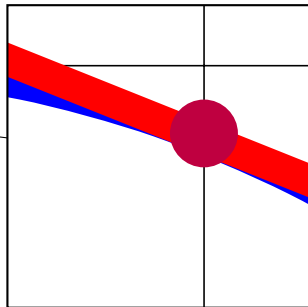
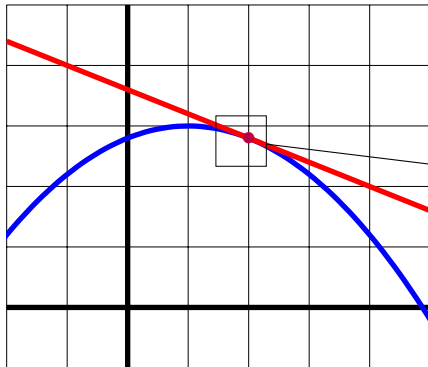
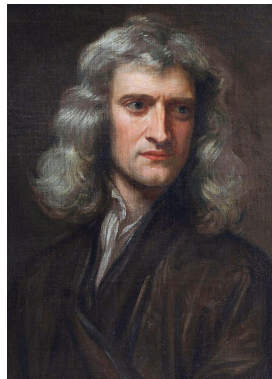




Dérivation – partie 1

La dérivation a été inventée par Newton au XVII^e siècle, c'est à dire par l'un des pères de la physique moderne.

C'est donc un outil inventé au service des sciences physiques. Newton utilise les dérivées pour écrire des lois de la nature : des équations faisant intervenir des dérivées, donc des équations différentielles.

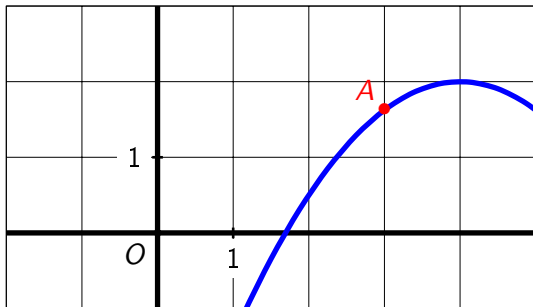


Encore aujourd'hui, beaucoup d'équations de la physiques s'écrivent de la même façon, avec des dérivées.

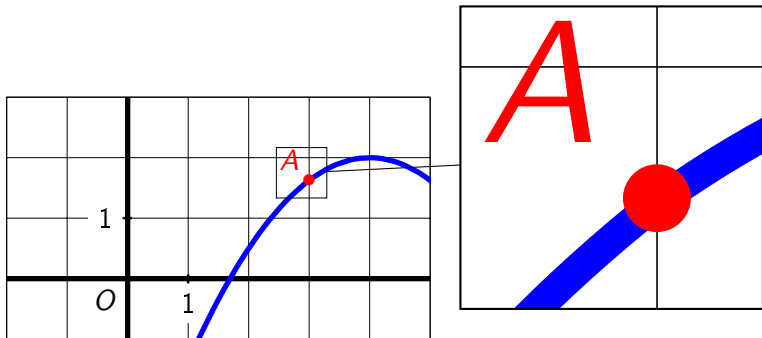
I. Tangente

De quoi s'agit-il ?

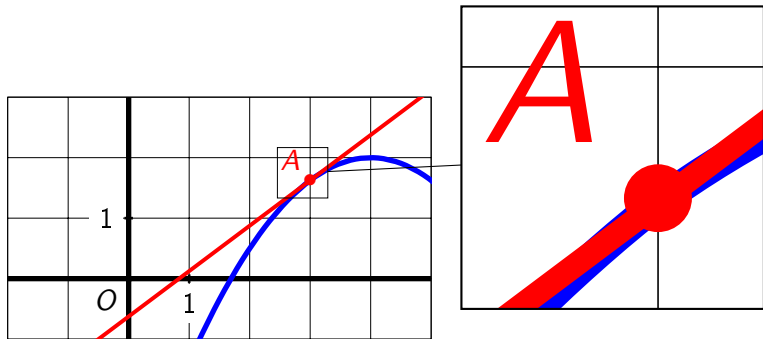
Considérons la courbe de $f : x \mapsto -0,375 \cdot (x - 4)^2 + 2$ et le point A de la courbe avec $x_A = 3$.



Si on regarde la courbe en A de très près, cette courbe ressemble à une droite.



Si on regarde la courbe en A de très près, cette courbe ressemble à une droite.



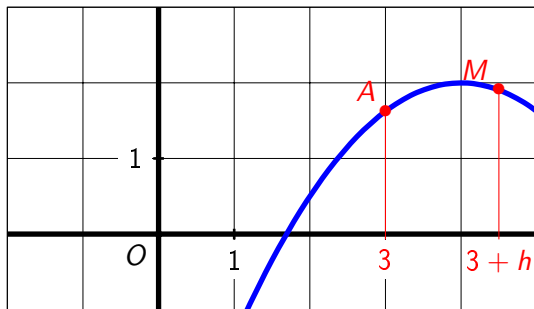
Cette droite est appelée la **tangente** à la courbe en A .

Dans cet exemple, $\mathcal{T}_A : y = 0,75x - 0,625$. C'est surtout le coefficient $m = 0,75$ qui a de l'importance. $m = 0,75$ est le **nombre dérivé de f en $x = 3$, c'est à dire $f'(3)$** .

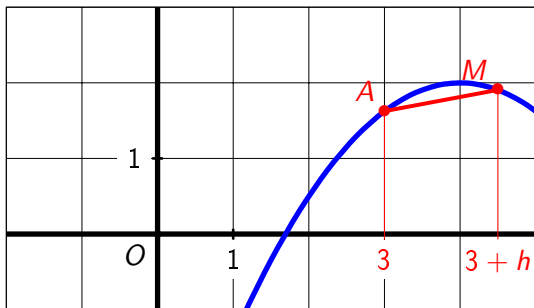
Comment le calculer ?

On connaît la fonction, $f : x \mapsto -0,375 \cdot (x - 4)^2 + 2$ et on veut faire le calcul en $x = 3$.

On peut calculer $f(3) = -0,375 \cdot (3 - 4)^2 + 2 = 1,625$. Le point de la courbe est donc en $A(3, 1,625)$.



Considérons un point M en $3 + h$. Le h n'est pas fixé mais $h \neq 0$.

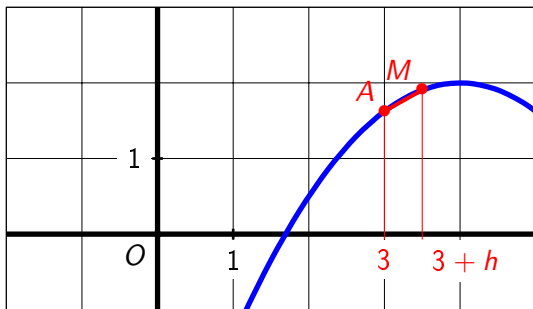


On doit exprimer $y_M = f(3 + h) = -0,375 \cdot (h - 1)^2 + 2$

À présent on cherche le coefficient directeur de (AM) :

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-0,375 \cdot (h - 1)^2 + 2 - 1,625}{h} = -0,375 h + 0,75$$

Le h au dénominateur se simplifie !



$$m = -0,375 h + 0,75$$

Pour obtenir la tangente, on rapproche M de A , c'est à dire que $h \rightarrow 0$. Avec la simplification précédente, on voit tout de suite que si $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0,75$.

On a trouvé le nombre dérivé $f'(3) = 0,75$.

Exercice 1

$$f(x) = -0,375 \cdot (x - 4)^2 + 2.$$

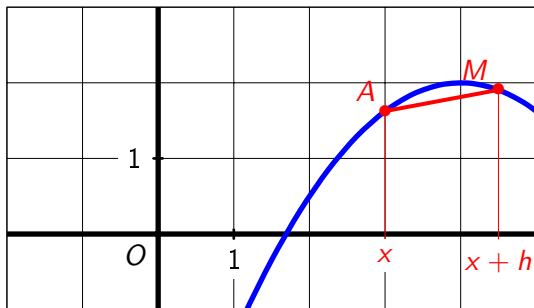
- a) Calculez $f(2)$
- b) Exprimez $f(2 + h)$ pour h quelconque
- c) Exprimez $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$
- d) Donnez la limite quand $h \rightarrow 0$.

La limite trouvée n'est autre que $f'(2)$.



On a fait l'explication ici avec le graphique pour que ce soit plus parlant. Mais on peut parler de dérivée et faire tous les calculs nécessaires sans jamais faire référence à une courbe.

En un point quelconque



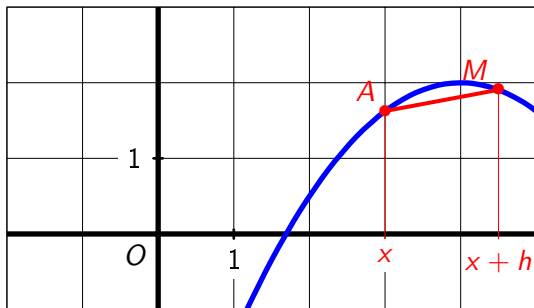
Supposons que l'on raisonne maintenant avec A en x quelconque et M un peu à côté, en $x + h$. Le raisonnement est le même :

$$x_A = x \quad ; \quad y_A = f(x_A) = -0,375 \cdot (x - 4)^2 + 2$$

$$x_M = x + h \quad ; \quad y_M = f(x_M) = -0,375 \cdot (x + h - 4)^2 + 2$$

$$\text{Donc } m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dots \text{ calculs } \dots = -0,375 \cdot h - 0,75 \cdot (x - 4)$$

En un point quelconque



$$m = -0,375 \cdot h - 0,75 \cdot (x - 4)$$

Comme avant, $M \rightarrow A$, c'est à dire $h \rightarrow 0$, et alors on voit que $m \rightarrow -0,75 \cdot (x - 4)$.

On en conclut :

$$f'(x) = -0,75 \cdot (x - 4)$$

C'est l'expression de la **fonction dérivée de f** .

Définition

Soit f une fonction.

On note $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ le **nombre dérivée de f en a** , si la limite existe et n'est pas $\pm\infty$.

Si $f'(a)$ peut être calculé pour tous les $a \in$ intervalle $\mathcal{I}$, on dit que f est **dérivable** sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

La fonction dérivée $f' : a \mapsto f'(a)$ est donc définie sur $\mathcal{I}$.

Propriété

Soit f , dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ a pour coefficient directeur $m = f'(a)$.

L'équation de la tangente en à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ est :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

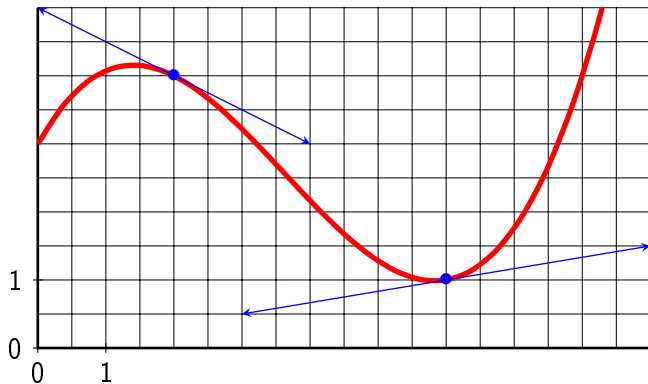
Exercice 2 : dérivée $\rightarrow$ tangente

Une certaine fonction f est telle que $f(3) = 4$ et $f'(3) = -0,5$.
Déduisez-en l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 3$.

Exercice 3 : tangente $\rightarrow$ dérivée

La fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique, déterminez :

- a) $f(2)$ et $f'(2)$
- b) $f(6)$ et $f'(6)$.



II. Fonctions de références

Exercice 4 : Trouver les dérivées de fonctions de référence

En utilisant le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, montrez que :

- a) la dérivée de $f(x) = a \cdot x + b$ est $f'(x) = a$,
- b) la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$
- c) la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$
- d) la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (*plus difficile*)

Attention !

Tout ce qu'on vient de dire sert à **comprendre** ce qu'est une dérivée. Mais pour aller plus vite, on fera le calcul **complètement différemment**.

On connaît :

- des formules pour les fonctions de référence,
- les règles pour combiner ces formules.

Exemple : On sait que $(x^2)' = 2x$ et $(x)' = 1$, donc :

$$(3x^2 + 7x)' = 3 \cdot 2x + 7 \cdot 1$$

Les fonctions de référence

Il faut les connaître, par cœur c'est mieux...

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \exp x$	$f'(x) = \exp x$	$\mathbb{R}$
...	...	...	...

Les fonctions de référence

Et savoir écrire très vite sans hésitation :

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$\dots$
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	$6x^5$	$\dots$

En tenant compte des priorités, une fonction peut être découpées en blocs.

$$3 \cdot (\boxed{x^2} - 17 \cdot \boxed{x} + \boxed{9}) + 8 \cdot \boxed{x^3}$$

- Considérer les blocs en x ...

Dans ce cas, les blocs auront seulement des $+$ et des $-$ entre eux.

Dans ce cas, ça reste très simple.

Notez que 3, 17 et 8 sont multipliés par des blocs contenant x . Au contraire, 9 n'est multiplié par aucun bloc avec x .

En tenant compte des priorités, une fonction peut être découpées en blocs.

$$3 \cdot (\boxed{x^2} - 17 \cdot \boxed{x} + \boxed{9}) + 8 \cdot \boxed{x^3}$$

$$3 \cdot (\boxed{2x} - 17 \cdot \boxed{1} + \boxed{0}) + 8 \cdot \boxed{3x^2}$$

- Considérer les blocs en x ...

Dans ce cas, les blocs auront seulement des + et des - entre eux.

Dans ce cas, ça reste très simple.

Notez que 3, 17 et 8 sont multipliés par des blocs contenant x . Au contraire, 9 n'est multiplié par aucun bloc avec x .

- On peut tout recopier en dérivant chaque bloc séparément bloc...

Le 9 n'étant multiplié avec aucun x sera dérivé en 0.

Prenons par exemple :

$$f(x) = (7x + 3) \cdot (x^2 + 7)$$

Dans ce cas, nous avons deux blocs contenant des x mais ces blocs sont **multipliés** entre eux (alors qu'avant il n'y avait que des $+$ et des $-$).

Dans ce cas c'est plus compliqué, il faudra des formules exprès.

Exercice 5 : Dérivées simples

Donnez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 8$

b) $f(x) = 3 \cdot x + 7$

c) $f(x) = \frac{2x}{5} \cdot x - 9$

d) $f(x) = 11x^2 + 53x - 29$

e) $f(x) = x^3 - 2x + 6$

f) $f(t) = 3t + t^2$

Exercice 6 : tangente encore

Soit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Donnez l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 3$

III. Variations

Taux d'accroissement $\rightarrow$ dérivée. On comprend donc que :

- $f' > 0 \Rightarrow$ accroissement positif $\Rightarrow f \nearrow$
- $f' < 0 \Rightarrow$ accroissement négatif $\Rightarrow f \searrow$

Donc pour étudier les **variations** de f , on peut commencer par étudier le **signe** de f' .

Exemple

On veut tracer le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 12x - 3$.

Pour cela on a besoin :

- de calculer Donc $f'(x) = 6x + 12$
- de résoudre $f'(x) = 0$. On trouve $x = -2$
- de calculer $f(x)$ pour les solutions précédentes.
Ici : $f(-2) = 12$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	12	$+\infty$



Exercice 7

Donnez les variations de ces deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$:

a) $f(x) = -0,2x^2 + x + 2$

b) $g(x) = -x^3 + x^2 + 2x$