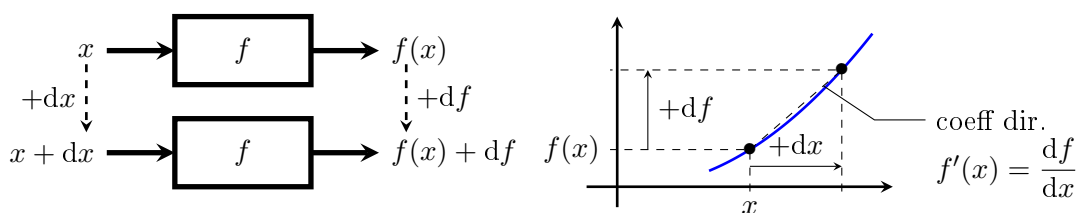


Dérivation



Variation dx en entrée $\Rightarrow$ variation df en sortie. Quand $dx \rightarrow 0$, df est **proportionnel** à dx . **Par définition**, le facteur de proportionnalité est $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \Leftrightarrow df = f'(x) \cdot dx \text{ au premier ordre}$$

Premier ordre

Revient à considérer que, si dx assez petit, d'autres termes comme dx^2 , dx^3 ... peuvent être négligés. En effet, si par exemple $dx = 0,01$, alors $dx^2 = 0,0001 \ll dx$.

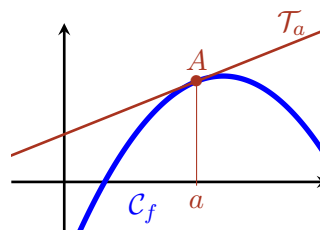
$$\begin{aligned} \text{ex. : } f(x) = 5x^2 + 6x - 4 &\Rightarrow f(x + dx) = 5(x + dx)^2 + 6(x + dx) - 4 \\ &= \underbrace{5x^2 + 6x - 4}_{f(x)} + \underbrace{(10x + 6) dx}_{f'(x)} + \underbrace{5dx^2}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

Tangente

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ est $\mathcal{T}_a$: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

Les points de $\mathcal{C}_f$ sont définis par $y = f(x)$. Si on regarde les points au voisinage de a , c'est à dire en $x = a + dx$:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(a + dx) \\ &= f(a) + f'(a) dx \\ &= f(a) + f'(a) (x - a) \end{aligned}$$



Variations

$f'(x)$ est le taux d'**accroissement** donc

- $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$,
- $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$.

Exemple de tableau de variations :

- $f(x) = 3x^2 + 12x - 3$
- Donc $f'(x) = 6x + 12$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $f(-2) = 12$

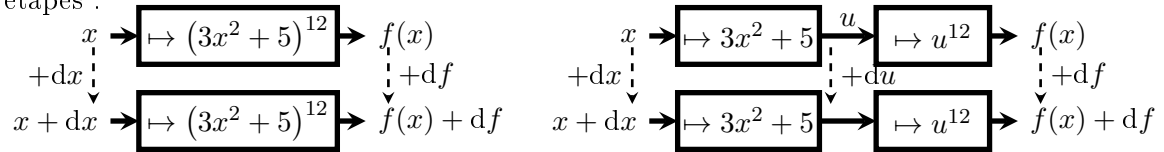
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	12	$+\infty$

En physique, les fonctions ont souvent plusieurs variables et il est naturel de ne pas préciser les antécédents. Par exemple il ne serait pas surprenant de voir écrit

$$f = (3x^2 + 5)^{12} \text{ au lieu de } f(x) = (3x^2 + 5)^{12}$$

Composition

Dans une expression comme $f(x) = (3x^2 + 5)^{12}$ on peut découper le calcul en deux grandes étapes :



Ici, chercher $f'(x)$, c'est chercher le facteur de proportionnalité $dx \rightarrow df$.

Ce facteur est $\frac{df}{dx}$. À droite, on décompose le calcul en insérant un intermédiaire u .

Si dx assez petit, du aussi et $dx \rightarrow du \rightarrow df$ est proportionnel :

$$dx \xrightarrow{\times \frac{df}{dx}} df \quad \text{devient} \quad dx \xrightarrow{\times \frac{du}{dx}} du \xrightarrow{\times \frac{df}{du}} df \quad \text{soit} \quad \frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{df}{du} = u' \cdot \frac{df}{du}$$

Dans cet exemple,

- $u = 3x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u'(x) = 6x$.
- $f = u^{12} \Rightarrow \frac{df}{du} = 12u^{11}$
- $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{df}{du} = 6x \cdot u^{11} = 6x \cdot 12(3x^2 + 5)^{11} = 72x(3x^2 + 5)^{11}$

				Fonction	Dérivée	Physique
$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$u \pm v$	$u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$u^n, n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$	$d(u^n) = du \cdot u^{n-1}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{u}, u \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$	$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{u}{v}, v \neq 0$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$
$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$f(u)$	$u' \cdot f'(u)$	$d(f(u)) = du \cdot \frac{df}{du}(u)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \exp x = e^x$	$f'(x) = \exp x$	$\mathbb{R}$	$\exp(u) = e^u$	$u' \cdot e^u$	$d(e^u) = du \cdot e^u$
$\mathbb{R}^{*+}$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\ln(u), u > 0$	$\frac{u'}{u}$	$d(\ln(u)) = \frac{du}{u}$

À la physicienne...

On peut voir la notation d comme une sorte de machine à dériver. Voici quelques exemples d'une écriture qui se rapproche de la façon des physiciens :

- $f(x) = 17x + 8 \Rightarrow df = 17 dx$
- $f(x) = (8x + 3)^5$, on reconnaît $u = 8x + 3$ soit $df = du \cdot 5u^4 = 8 \cdot 5 \cdot (8x + 3)^4$
- $f(x) = (5x + 7) \cdot (6 - x)$ on a alors $u = 5x + 7$ et $v = 6 - x$ et $df = du \cdot v + u \cdot dv = 5 \cdot (6 - x) + (5x + 7) \cdot (-1)$