BTS Métiers de la chimie

Mathématiques

Exercice 1

Présentation

On s'intéresse à une certaine bactérie. Déposée sur un aliment et sous certaines conditions, notamment la présence suffisante de nutriments, elle se développe très fortement.

Le temps de génération, noté t_G, d'une population bactérienne est le temps qu'elle met pour doubler son effectif, dans des conditions où la nourriture est abondante. On notera t_G le temps de génération. Voici le temps de génération de différentes bactéries.

Nom	t_G
Bacillus stearothermophilus	8 min
Staphylococcus Aurerus	40 min
Mycobacterium tuberculosis	6 h

Pour étudier la croissance de bactéries sur un échantillon de mix. Voici les relevés du nombre de bactéries SA heure par heure, mesure à partir du moment où les bactéries sont déposées sur le mix.

t_i	0	1	2	3	4	5	6
N_i	10	27	78	232	650	1 850	5 100

t_i : temps en heures, N_i : nombre de bactéries

mix : Mélange contenant en grande partie du lait permettant la fabrication de glaces à l'italienne.

On souhaite modéliser l'évolution du nombre de bactéries par une fonction. On cherche donc une fonction compatible avec les valeurs reportées dans le tableau et suffisamment réaliste.

Modèle

On fait l'hypothèse que la croissance de bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries présentes. Cela nous conduit à l'équation :

$$(E): \quad y' = \alpha \cdot y \Leftrightarrow y' - \alpha\, y = 0$$

Où y est une fonction du temps, que l'on exprimera en heures, et représente le nombre de bactéries N sur le mix (autrement dit, $y(t) = N(t)$). α est une constante que l'on cherchera à déterminer.

1) C3 Quelle est l'unité de α ?

Correction : $y' = \frac{dy}{dt}$ donc y' a l'unité de y divisée par l'unité de t. Donc α est en h^{-1}.

2) C2 Donner la forme générale de la solution $y(t)$ de l'équation (E).

Correction : On peut reconnaître directement que $y = K\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Si on veut faire plus de détails :

i. $(E_0) : y' = -\alpha y$ soit la même chose que (E). La solution de (E_0) est $y_0 = -K\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

ii. $y_1 = 0$ est une solution évidente de (E).

iii. Les solutions de (E) s'écrivent donc $y = y_0 + y_1 = K\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

iv. À ce stade, on ne sait pas la valeur initiale de $y(t)$. Si on veut, on peut regarder un peu la suite et constater que $y(0) = 10$. Alors $0 = K\,\mathrm{e}^{0}$ et donc $K = 10$ et donc $y = 10\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Dans le problème qui nous occupe, cette valeur 10 n'a aucune importance. On peut remarquer que cette forme correspond à celle proposée en question (4) [je rappelle que $y(t) = N(t)$] ce qui nous permet déjà d'anticiper que α vaudra quelque chose comme $1,05$.

3) Ce résultat nous conduit à faire un ajustement de N en t en faisant le changement de variable

$$z_i = \ln(N_i)$$

a) ❗ $\boxed{\text{C5}}$ Compléter le tableau ci-dessous. Vous arrondirez au centième **le plus proche**.

À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = a \cdot t + b$

Vous arrondirez les valeurs de a et b au millième.
Correction : Je remplis le tableau

t_i	0	1	2	3	4	5	6
N_i	10	27	78	232	650	1 850	5 100
$z_i = \ln(N_i)$	2,30	3,30	4,36	5,45	6,48	7,52	8,54

On obtient alors, toujours avec la calculatrice :

$$z = 1,046t + 2,283$$

Quelques remarques :

- c'est beaucoup mieux d'utiliser la calculatrice pour avoir directement toutes les valeurs de z et de ne pas le faire à l'unité.
- certains ont calculé au détail les valeurs de z et ont utilisé les valeurs approximées au centième pour faire l'ajustement. Mais si vous arrondissez les valeurs de z au centième, il sera difficile d'avoir a et b au millième ! (plus précisément : la calculette vous donnera quelque chose, mais la valeur du millième n'aura aucune pertinence)
- Reporter les valeurs de z au centième dans le tableau n'est qu'un affichage. Si vous faites bien les choses, la calculette fait son calcul avec des z très précis. Notez pour finir que le passage par la variable z n'est qu'une astuce de calcul et qu'elle ne devrait alors pas ajouter d'imprécision aux calculs.

b) $\boxed{\text{C3}}$ En déduire une expression de N en fonction de t.
Correction : $z = \ln(N) = 1,046t + 2,283$. On en déduit :

$$\mathrm{e}^z = N = \mathrm{e}^{1,046t+2,283}$$

Remarque : on sait que $N = y = K\,\mathrm{e}^{\alpha t}$. On peut avoir l'impression que $\mathrm{e}^{1,046t+2,283}$ et $K\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, ce n'est pas exactement la même chose. Mais...

$$N = \mathrm{e}^{1,046t+2,283} = \mathrm{e}^{2,283} \cdot \mathrm{e}^{1,046t} \approx 9,806\,\mathrm{e}^{1,046t}$$

Là on voit bien que c'est la bonne forme.

4) Pour la suite on admettra que $N(t) = 10\,\mathrm{e}^{1,05\,t}$.

a) $\boxed{\text{C4}}$ En déduire la valeur de α (avec son unité).
Correction : Puisque on devait avoir $N(t) = K\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, on reconnaît que $\alpha = 1,05\,h^{-1}$.

b) $\boxed{\text{C2}}$ Par la méthode de votre choix, déterminer le temps de génération t_G.
Correction : Plusieurs méthodes sont possibles.

i. Une estimation grossière. On voit dans le tableau que l'on passe de 10 à 27 en 1 heure. Donc le temps de génération est d'un peu moins de 1 heure.

   On peut même être plus précis en constatant que N passe de 10 à 78 en 2 heures, donc en 2 heures, le nombre est multiplié par $8 = 2^3$, c'est à dire que le nombre est doublé 3 fois de suite. Donc $2\,h \approx 3t_G$ et $t_G = \frac{2}{3} \approx 0,67$.

ii. En faisant un graphique, il suffira de lire t pour lequel $N(t) = 20$.

iii. Par le calcul :

$$\begin{aligned} N(t) = 2 \times N(0) &\Leftrightarrow 10\,\mathrm{e}^{1{,}05t} = 2 \times 10 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{1{,}05t} = 2 \\ &\Leftrightarrow 1,05t = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow 1,05t = \frac{\ln(2)}{1,05} \approx 0,66\,h \end{aligned}$$

On obtient donc $t_G \approx 0,66\,h$.

c) C1 En déduire le nom de la bactérie.

CORRECTION : $0,66\,h = 0,66 \times 60\,min = 39,6\,min$

La bactérie est donc Staphylococcus Aurerus.

5) Toujours avec $N(t) = 10\,\mathrm{e}^{1{,}05\,t}$, on s'intéresse aux temps longs, c'est à dire $t \to +\infty$.

a) C5 Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$

CORRECTION :

$$\begin{aligned} t \to +\infty &\Rightarrow 1,05t \to +\infty \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{1{,}05t} \to +\infty \\ &\Rightarrow N(t) \to +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$$

b) C6 Ce résultat est-il réaliste ? Expliquer.

CORRECTION : Ce résultat n'est pas réaliste puisque il ne peut y avoir une infinité de bactéries (il n'y a pas une infinité de particules dans l'univers...)

Le modèle est trop simple, il suppose que les bactéries auront toujours assez de nourriture. C'est vrai au début mais quand les bactéries deviennent très nombreuses, elles ne peuvent plus continuer à se reproduire au même rythme.

Exercice 2

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près, c'est à dire à $0,1\,\%$ près.

Une entreprise fabrique un décapant, vendu en bouteille, contenant une molécule dont un composant est toxique. Une norme limite donc la quantité de ce composant et on rejette le bouteilles qui en contiennent trop. Cependant, limiter trop ce composant risque de rendre inefficace le décapant.

On prélève au hasard une bouteille dans la production. On note les événement :

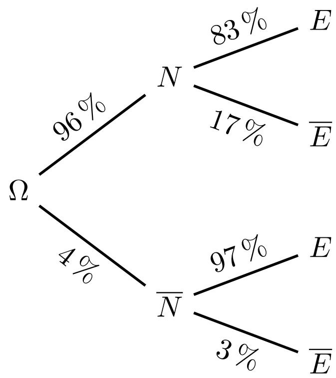
- N : « la bouteille respecte la norme », autrement dit, le composant toxique est quantité normale.
- E : « le décapant est suffisamment efficace. »

Par ailleurs, une étude statistique à permis de constater que :

- $4\,\%$ des bouteilles produites **ne respectent pas** la norme.
- Parmi les bouteilles **ne respectant pas** la norme, $97\,\%$ contiennent un décapant suffisamment efficace.
- Parmi les bouteilles respectant la norme, on en trouve $17\,\%$ qui contiennent un décapant **non suffisamment** efficace.

Important : Vous n'utiliserez pas d'autres lettres que E et N (et $\overline{E}$ et $\overline{N}$ bien sûr) pour désigner les événements.

a) C6 Représenter cette situation par un arbre (plus simple) ou un tableau, selon votre préférence.
CORRECTION :



b) C1 Donner la probabilité que la bouteille contienne un décapant efficace sachant qu'elle respecte la norme.
CORRECTION :

$$p_N(E) = 100\,\% - 17\,\% = 83\,\%$$

C'est la valeur en haut de l'arbre.

c) C5 Donner la probabilité que la bouteille contienne un décapant efficace.
CORRECTION :

$$p(E) = 0.83 * 0.96 + 0.97 * 0.04 = 83.6\,\%$$

d) C4 Justifier que les événements E et N ne sont pas indépendants ?
CORRECTION : On peut le prouver de deux façons.

i. On a constaté que $p_N(E) = 83\,\%$ et $p(E) = 83,6\,\%$. Une connaissance sur N change donc la probabilité de E. Les deux événements ne sont donc pas indépendants.

ii. En utilisant la définition : $p(E) \times p(N) = 0,836 \times 0,96 = 0,80256$ et $p(E \cap N) = 0,96 \times 0,83 = 0,7968$ (c'est la branche du haut de l'arbre).
On a donc $p(E \cap N) \neq p(E) \times p(N)$ et donc les deux événements ne sont pas indépendants.

Remarque : dans les deux cas, on n'est pas loin de l'égalité ce qui veut dire que c'est presque indépendant (autrement dit, une info sur N ne donne qu'une petite info sur E).

e) C5 Sachant que la bouteille prélevée contient un décapant efficace, quelle est la probabilité qu'elle respecte la norme ?
CORRECTION :

$$p_E(N) = \frac{p(E \cap N)}{p(E)} = \frac{0.83 \times 0.96}{0.83 \times 0.96 + 0.97 \times 0.04} \approx 95,4\,\%$$