Transformation bilinéaire

Permet de passer d'une fonction de transfert $H(p)$ en Laplace à la même fonction en z. on pourra noter $\hat{H}(z)$, le chapeau sert à distinguer la version Laplace de la version z.

Lien entre z et p

Transformation de Laplace de $f(t)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p.t}$$

Transformation en z de $f_n = f(nT_e)$, T_e = période d'échantillonnage

$$\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n}$$

on voit que $\int \rightarrow \sum$

$f(t) \rightarrow f_n$

$e^{-pt} \rightarrow z^{-n}$

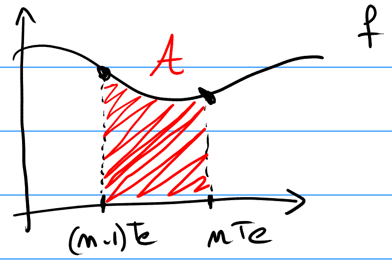
puisque l'échantillon n correspond au temps $t = nT_e$ on voit que z^{-n} correspond à $e^{-p.nT_e}$

et donc, d'une certaine façon, $z^{-n} = e^{-p.nT_e} = \left(e^{pT_e}\right)^{-n}$

donc $\boxed{z = e^{pT_e}}$

malheureusement, cette formule est peu exploitable si on veut remplacer p par z.

Approximation

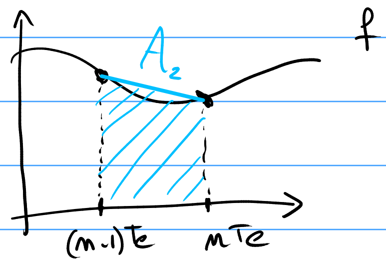


pour calculer A il faudra la primitive F de f.

on aura $A = F(nT_e) - F((n-1)T_e)$

$= F_n - F_{n-1}$

ce qui en z s'exprime $(1 - z^{-1})\, F(z)$



On pourrait faire une approximation A_2 par la méthode des trapezes :

$$A_2 = \frac{f(nT_e) + f((n-1)T_e)}{2} \times T_e$$

$$= \frac{f_n + f_{n-1}}{2} \times T_e$$

ce qui en z s'exprime $\dfrac{f(z) + z^{-1} f(z)}{2} \cdot T_e = \dfrac{T_e}{2}(1+z^{-1})\, f(z)$

si T_e assez petit on peut approximer $A_2 \simeq A$

et donc $(1 - z^{-1})\, F(z) \simeq \frac{T_e}{2}(1+z^{-1})\, f(z)$

⚠ $F(z)$ est la TZ de la primitive de f et $f(z)$ est la TZ de f.

on a donc $F(z) = \dfrac{T_e}{2} \dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} f(z)$

Si on avait fait le même calcul en p, puisque $f(t) = F'(t)$

en p on a : $f(p) = p\, F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p} f(p)$

On déduit que, en p, l'intégration se traduit $\times \frac{1}{p}$

et en z, l'intégration se traduit approximativement $\times \dfrac{T_e}{2} \dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$

on pose donc $\dfrac{1}{p} = \dfrac{T_e}{2} \cdot \dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow \boxed{p = \dfrac{2}{T_e} \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

Question initiale

Connaissant la fonction de transfert $H(p)$

on pourra approximer une version échantillonnée par

$$\boxed{\hat{H}(z) = H\left(\frac{2}{Te}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$$

c'est à dire que dans $H(p)$, on remplace tous les p par

$$\frac{2}{Te}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Developpement limité

Comme $z = e^{Tep}$, on peut vérifier que l'on retrouve bien approximativement, pour T_e petit, $p = \frac{2}{Te}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$\frac{2}{Te}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{Te}\,\frac{1-e^{-pTe}}{1+e^{-pTe}} = \frac{2}{Te}\,\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+pTe-\frac{(pTe)^2}{2}+o(T_e^2)}{1+1-pTe+\frac{(pTe)^2}{2}+o(te)^2}$$

$$\overset{\div 2}{=}\frac{2}{Te}\,\frac{pTe-\frac{p^2T_e^2}{2}+o(T_e^2)}{2-pTe+\frac{p^2Te^2}{2}+o(Te^2)}$$

$$= \frac{1}{Te}\,\frac{pTe-\frac{p^2Te^2}{2}+o(Te^2)}{1-\frac{pTe}{2}+\frac{p^2Te^2}{4}+o(Te^2)}$$

$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2+\ldots$

$$= \frac{1}{Te}\left(pTe-p^2\frac{Te^2}{2}+o(Te^2)\right)\left(1+\frac{pTe}{2}-\cancel{\frac{p^2Te^2}{4}}+\cancel{\frac{p^2Te^2}{4}}+o(te^2)\right)$$

$$= \frac{1}{Te}\left(pTe+\cancel{\frac{p^2Te^2}{2}}-\cancel{\frac{p^2Te^2}{2}}+o(te^2)\right)$$

$$\boxed{\frac{2}{Te}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = p + o(T_e)}$$

Exemple

$$H(p) = \frac{1}{1+5p} \qquad \text{avec } T_e = 0{,}1 \Rightarrow \frac{2}{T_e} = 20$$

on a donc $\hat{H}(z) = H\left(20\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \dfrac{1}{1+5\cdot 20\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$= \frac{1}{1+100\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad \begin{matrix}\times\, 1+z^{-1}\\ \times\, 1+z^{-1}\end{matrix}$$

$$= \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}+100-100z^{-1}}$$

$$= \frac{1+z^{-1}}{101-99z^{-1}}$$

Récurrence

maintenant que l'on a $\hat{H}(z)$ on peut déduire une récurrence entre l'entrée e et la sortie s

$$\hat{S}(z) = \hat{H}(z)\cdot\hat{E}(z) \Rightarrow \hat{S}(z) = \frac{1+z^{-1}}{101-99z^{-1}}\,\hat{E}(z)$$

$$\Rightarrow 101\,\hat{S}(z) - 99z^{-1}\,\hat{S}(z) = \hat{E}(z) + z^{-1}\hat{E}(z)$$

$$\Rightarrow 101\,s_n - 99\,s_{n-1} = e_n + e_{n-1}$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{101}\left(e_n + e_{n-1} + 99\,s_{n-1}\right)$$

Comparaison avec Euler

$H(p) = \frac{1}{1+5p}$ correspond à l'équation $5s' + s = e$

avec la méthode de Euler on aurait écrit :

$$s_{n+1} = T_e \cdot s'_n + s_n$$

$$= 0{,}1\cdot\frac{1}{5}(e_n - s_n) + s_n$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{50}\,e_n + \frac{49}{50}\,s_n \qquad \text{avec } s_0 = 0$$

Vous pouvez remarquer que $\frac{1}{50}e_n \simeq \frac{1}{101}(e_n + e_{n-1})$ et $\frac{49}{50}s_n \simeq \frac{99}{101}s_n$