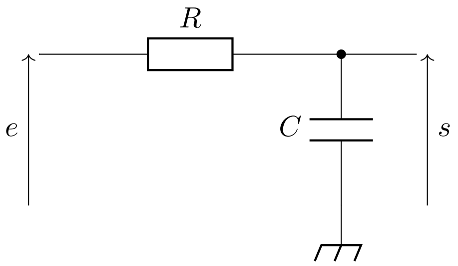
Laplace – extension

Quand on a fini d'apprendre comment fonctionne une résolution de problème utilisant la transformation de Laplace, c'est bien de faire des liens pour comprendre un peu pourquoi ça fonctionne et ce que ça apporte de plus.

I Comparaison Laplace vs. la méthode pré-bac

I.1 Premier ordre

Commençons avec des équation du premier ordre. Ce pourrait être un système comme celui-ci :



$$RC \cdot s' + s = e \quad s(0) = 0$$

En général, on pose $RC = \tau$ car RC doit être homogène à un temps en secondes. On a donc une équation assez générale :

$$\tau s' + s = e \quad s(0) = 0$$

Ce que l'on pourra dire ici restera valable du moment que l'équation est la même. On trouverait par exemple une équation de même genre si on étudiait un moteur à courant continu ou la mise en chauffe d'un récipient.

On se place toujours avec $t = 0$ comme point de départ de l'expérience. Pour $t < 0$ tout est éteint si bien que ici le condensateur serait déchargé. On sait que l'énergie contenu dans un condensateur est de la forme $E = \frac{U^2}{2C}$, et comme l'énergie varie continûment, alors U, la tension à ses bornes aussi. Ici $U = s$. Donc s est continue ce qui permet d'affirmer que $s(0) = 0$.

On retrouverait une idée semblable si on étudiait la vitesse de rotation d'un moteur ou une température qui ne peuvent changer de façon discontinue.

I.1.1 Premier cas, $e(t) = E_0$

Méthode pré-bac

$$\tau s' + s = E_0 \quad s(0) = 0$$

(a) On résout l'équation sans second membre :

$$\tau s' + s = 0 \Rightarrow s_0(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), K \in \mathbb{R}$$

Notez bien que cette étape est indépendante de $e(t)$.

(b) On **devine** une solution particulière possible pour l'équation. Par exemple, on tente $s(t) = c$ où c est une constante à déterminer. Donc $s'(t) = 0$ et en remplaçant dans l'équation :

$$\tau \times 0 + c = E_0 \Rightarrow c = E_0 \Rightarrow c = E_0$$

Donc $s_1(t) = E_0$ est une solution particulière.

(c) La solution la plus générale de l'équation, sans tenir compte de la condition initiale, est donc $s(t) = s_1(t) + s_0(t) = E_0 + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), K \in \mathbb{R}$

(d) Tenant compte que l'on a $s(0) = 0$ on déduit :

$$E_0 + K \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = 0 \Rightarrow E_0 + K = 0 \Rightarrow K = -E_0$$

Et donc pour finir la solution de l'équation est

$$s(t) = E_0 - E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cette méthode est simple et rapide pour un premier ordre mais elle a quelques défauts qui empêchent d'aller trop loin :

- L'étape (b) nécessite d'avoir l'intuition de la forme de la solution. Ce n'est pas forcément évident si $e(t)$ devient plus compliqué.
- L'étape (d) peut être assez longue dans les cas plus compliqué, par exemple si $e(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Méthode Laplace

Dans le cadre de la méthode de Laplace, nous devons déjà formalisé que l'équation précédente n'est valable que pour $t \geqslant 0$ et donc que $e(t) = E_0$ seulement pour $t \geqslant 0$. On écrira donc $e(t) = E_0 \mathcal{U}(t)$ et l'équation devient :

$$\tau s'(t) + s(t) = E_0 \mathcal{U}(t), s(0) = 0$$

(a) Passage dans le domaine de Laplace.

$s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$ et $s'(t) \xrightarrow{TL} p\,S(p) - s(0) = p\,S(p)$.
$e(t) \xrightarrow{TL} \frac{E_0}{p}$
Donc on a facilement :

$$\tau p S(p) + S(p) = \frac{E_0}{p}$$

(b) Résolution dans le domaine de Laplace

$$S(p)(\tau p + 1) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{E_0}{(\tau p + 1)\,p}$$

(c) Décomposition en éléments simples.

En supposant une situation réelle (pas un sujet de BTS où on se contente de vérifier une solution toute faite), on devrait trouver la forme de la décomposition.

C'est au niveau des **pôles** que cela se joue, c'est à dire les valeurs de p annulant le dénominateur. Ici on voit que le dénominateur s'annule pour $p = 0$ et $\tau p + 1 = 0$, on est donc certain que l'on aura :

$$S(p) = \frac{?}{p} + \frac{?}{\tau p + 1}$$

De plus, $S(p)$ s'écrie sous la forme $\frac{polynome(p)}{polynome(p)}$ avec un degré plus grand au dénominateur. On est donc certain que l'on pourra faire de même dans la décomposition :

$$S(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{\tau p + 1}$$

Il ne reste qu'à déterminer a et b.

$$S(p) = \frac{a\tau p + a + bp}{(\tau p + 1)p} = \frac{E_0}{(\tau p + 1)\,p}$$

On déduit $p \cdot (a\tau + b) + a = E_0$, ce pour tout p, donc

$$\begin{cases} a\tau + b = 0 \\ a = E_0 \end{cases} \Rightarrow a = E_0 \text{ et } b = -E_0\tau$$

Et donc

$$S(p) = \frac{E_0}{p} - \frac{E_0\tau}{\tau p + 1}\frac{\div\tau}{\div\tau} = \frac{E_0}{p} - \frac{E_0}{p + \frac{1}{\tau}}$$

(d) Retour en temporel

$$s(t) = E_0\mathcal{U}(t) - E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathcal{U}(t)$$

Ce que l'on peut simplifier en ne considérant que la partie $t \geqslant 0$ pour laquelle $\mathcal{U}(t) = 1$:

$$t \geqslant 0, s(t) = E_0 - E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

À première vue, on n'a pas l'impression que ce soit plus simple...
C'est la décomposition en élément simple qui représente l'essentiel du calcul. En effet, à elle seule, elle rassemble tous les calculs des phase (a) – (d) de la méthode pré-bac.
Il faut bien dire que s'il ne fallait résoudre que des équations comme celle-ci, mieux vaudrait s'en tenir à la méthode pré-bac !
Alors pourquoi utiliser Laplace ?

- Dans le cas d'équations plus compliquées, le fait de ne pas avoir à deviner une solution (étape (b) méthode pré-bac) nous rendra la méthode de Laplace plus facile.
- C'est une méthode automatique. Certes, les calculs peuvent être longs mais on n'a rien à deviner et les calculs sont toujours les mêmes.
  Cette méthode permettra donc d'informatiser les choses : Les ordinateurs sauront résoudre automatiquement les équations.
- Ce qui prends du temps dans le calcul de la solution, c'est la décomposition en éléments simples. Cette décomposition n'est utile que si on veut connaître l'expression de $s(t)$. Mais dans l'étude des automatismes, il n'est souvent pas utile de connaître $s(t)$. La connaissance de $S(p)$ suffit à répondre à bien des questions : le système est-il stable ? précis ? etc.

I.1.2 Deuxième cas, $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$

Méthode pré-bac

$$\tau s' + s = E_0 \cos(\omega_0 t) \quad s(0) = 0$$

(a) Pas de différence : $s_0(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

(b) Quoi choisir pour $s_1(t)$?
Il faudrait penser à $s_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et il faudrait trouver les valeurs de A et B... Allons-y (avec enthousiasme !)
$s_1'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$$\tau(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)) + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$$

Le nombre de $\cos(\omega_0 t)$ et de $\sin(\omega_0 t)$ de part et d'autre doit s'égaliser donc

$$\begin{cases} A + B\tau\omega_0 = E_0 \\ -A\tau\omega_0 + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow A = \frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2} \text{ et } B = \frac{E_0\tau\omega_0}{1+\tau\omega_0^2}$$

Donc

$$s_1(t) = \frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{E_0\tau\omega_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\sin(\omega_0 t)$$

(c) $s(t) = s_1(t) + s_0(t)$, pas de changement.

(d) $s(t) = 0$ nous permet de choisir K :

$$\frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\cos(0) + \frac{E_0\tau\omega_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\sin(0) + K\exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2} + K = 0$$

On déduit donc :

$$s(t) = \frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{E_0\tau\omega_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\sin(\omega_0 t) - \frac{E_0}{1+\tau^2\omega_0^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Méthode Laplace

$$\tau s' + s = E_0 \cos(\omega_0 t)\mathcal{U}(t) \quad s(0) = 0$$

(a) En Laplace

$$\tau p S(p) + S(p) = \frac{E_0 p}{p^2 + \omega_0^2}$$

(b) Résolution en Laplace :

$$S(p) = \frac{E_0 p}{(p^2+\omega_0^2)(\tau p + 1)}$$

(c) Décomposition en élément simples :

$$S(p) = \frac{ap+b}{p^2+\omega_0^2} + \frac{c}{\tau p + 1}$$

Mise au même dénominateur

$$S(p) = \frac{a\tau p^2 + ap + b\tau p + b + cp^2 + c\omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)(\tau p + 1)}$$

On en déduit

$$\begin{cases} a\tau + c = 0 \\ a + b\tau = E_0 \\ b + c\omega_0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a\tau \\ a + b\tau = E_0 \\ b = -c\omega_0^2 = a\tau\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow a + a\tau^2\omega_0^2 = E_0$$

Et pour finir :

$$a = \frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \quad b = \frac{E_0 \tau \omega_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \omega_0 \quad c = -\frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \tau$$

Soit

$$S(p) = \frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{E_0 \tau \omega_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} - \frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \frac{\tau}{\tau p + 1}$$

(d) Retour en temporel

$$s(t) = \frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{E_0 \tau \omega_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{E_0}{1 + \tau^2\omega_0^2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Ce cas plus compliqué porte quelques enseignements :

- On reconnaît en parallèle les mêmes étapes dans les deux méthodes : les calculs de a et b correspondent aux calculs de A et B ; le calcul de c correspond au calcul de K.
  Dans la méthode de Laplace, cela se fait à travers une grosse résolution d'équations. Elle est longue et pas spécialement simple mais son avantage est d'être automatique et faisable par une machine.
- Malgré son côté abstrait, la méthode de Laplace met mieux en évidence les paramètres important de la solution, cela avant même d'avoir à faire beaucoup de calculs.
  Dès l'écriture $S(p) = \frac{?}{(p^2+\omega_0^2)(\tau p+1)}$, on sait que la solution aura deux composantes :
  - une composante sinusoïdale de pulsation ω_0. Ce qui est difficile à déterminer à ce stade, c'est l'amplitude et le déphasage de cette ondulation.
    Quand on étudie un système en régime permanent, seule cette composante nous intéresse.
  - une composante exponentielle en $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
    Cette composante est liée à la partie gauche de l'équation différentielle et sera toujours présente. C'est son amplitude (K) qui est difficile à déterminer.

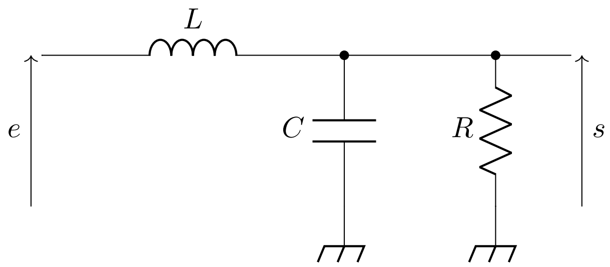
  La composante exponentielle est **transitoire**. Elle disparaît au bout d'un certains temps (3 ou 4 τ environ) si bien que si on visualise $s(t)$ sur un oscilloscope, on ne verra que la composante sinusoïdale, la composante exponentielle aura disparu depuis longtemps... à moins d'utiliser un oscilloscope à mémoire qui photographie l'instant initial.
- Dans les deux méthodes, on a choisi de séparer sin() et cos() ce qui n'est pas une bonne chose du point de vue d'un physicien. Il serait préférable de regrouper ces deux termes en un $\cos(\omega_0 t - \varphi)$.

$$s(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) - E_0 \cos(\varphi) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec } \varphi = \arctan(\tau\omega_0)$$

Avouez que c'est plus simple comme ça...
On verra plus loin comment on peut retrouver cela très simplement, sans avoir à passer par tous ces calculs.

I.2 Deuxième ordre

Par exemple, un système comme celui-ci



L'équation serait (je saute le travail de l'électricien...)

$$LCs'' + \frac{L}{R}s' + s = e \quad s(0) = s'(0) = 0$$

Nous allons poursuivre avec quelque chose de plus général :

$$as'' + bs' + cs = e \quad s(0) = s'(0) = 0$$

On se limitera aussi à $e(t) = E_0$.

I.2.1 Le cas $\Delta > 0$

Méthode pré-bac

$$as'' + bs' + cs = E_0 \quad s(0) = s'(0) = 0$$

(a) Résoudre $as'' + bs' + cs = 0$.
Pour cela on considère le polynôme caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.
Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On suppose ici que $\Delta > 0$.
On aura deux racines

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Et donc $s_0(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t), \quad A, B \in \mathbb{R}$

(b) Solution particulière : On cherche $s_1 = C$, donc $s_1' = s_1'' = 0$ et en remplaçant on a :

$$a \times 0 + b \times 0 + c \times C = E_0 \Rightarrow C = \frac{E_0}{c}$$

Donc $s_1(t) = \frac{E_0}{c}$ est une solution particulière de l'équation.

(c) $s(t) = s_1(t) + s_0(t) = \frac{E_0}{c} + A\exp(-r_1 t) + B\exp(-r_2 t)$

(d) On cherche les valeurs de A et B telles que $s(0) = s'(0) = 0$

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{E_0}{c} + A + B = 0$$

$$s'(t) = A\, r_1 \exp(r_1 t) + B\, r_2 \exp(r_2 t)$$

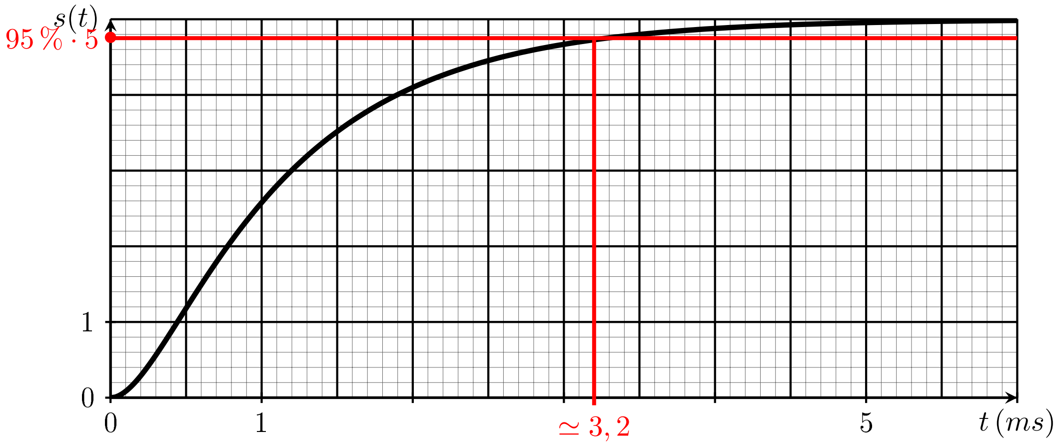
$$s'(0) = 0 \Rightarrow A\, r_1 + B\, r_2 = 0$$

Et il reste à résoudre le système. Je vous épargne les détails :

$$A = -\frac{r_2}{r_2 - r_1}\frac{E_0}{c} \quad B = -\frac{r_1}{r_1 - r_2}\frac{E_0}{c}$$

Exemple réaliste : $L = 250\, mH$, $C = 1\, \mu F$ et $R = 200\, \Omega$ ce qui nous donne $0,25 \times 10^{-6}\, s'' + 50 \times 10^{-6} s' + s = 5$, on aura $\Delta = 0,5625 \times 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0,75 \times 10^{-3}$ et $r_1 = -4 \times 10^3$ et $r_2 = -1 \times 10^3$, $\frac{E_0}{c} = 5$, $A = \frac{1}{3}$ et $B = -\frac{4}{3}$

$$s(t) = 5 + \frac{1}{3} 5 \exp(-4000\, t) - \frac{4}{3} 5 \exp(-1000\, t)$$



- En $t = 0$, la concavité de la courbe est en $\cup$, ce qui vient de $+\exp(-4t)$.
- $\exp(-4000\, t) \to 0$ rapidement, si bien qu'il ne reste que $-\exp(-1000\, t)$ dont la concavité est en $\cap$.
- On sait que $s_\infty = 5$. Supposons que l'on veuille chercher t tel que $s(t) = 95\,\%\, s_\infty$.
  - On peut le faire graphiquement. On constate que la solution est d'environ $t \simeq 3,2\, ms$.
  - On peut faire la même chose sur une calculatrice pour atteindre une meilleure précision.
  - La tentative de résolution $s(t) = 0,95 \times 5$ soit en divisant par 5 : $1 + \frac{1}{3}\exp(-4000\, t) - \frac{4}{3}\exp(-1000\, t) = 0,95$. Mais cette équation est trop difficile à résoudre exactement. Une astuce est de considérer que pour $t \simeq 3\, ms$ (la solution est à ces environs), $\exp(-4000\, t)$ devient négligeable et on peut se contenter de $1 - \frac{4}{3}\exp(-1000\, t) \simeq= 0,95$ ce qui est facile à résoudre : $t \simeq -\frac{1}{1000}\ln\left(\frac{3}{4} \times 0,05\right) \simeq 3,28\, ms$.

D'une façon générale, il est utile de voir que l'on a ici deux constantes de temps. Elles peuvent venir de deux phénomènes différents, par exemple l'association L-R et l'association L-C dans le circuit. L'une des deux est beaucoup plus faible que l'autre. L'effet de l'un des deux disparaît vite de sorte qu'il ne reste que le second, plus lent, et le circuit se comporte alors comme un premier ordre.

Méthode de Laplace

$$as'' + bs' + cs = E_0\,\mathcal{U}(t) \quad s(0) = s'(0) = 0$$

(a) $s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$
$s'(t) \xrightarrow{TL} p\,S(p) - s(0) = p\,S(p)$
$s''(t) \xrightarrow{TL} p\,(p\,S(p)) - s'(0) = p^2\,S(p)$
$e(t) \xrightarrow{TL} \frac{E_0}{p}$
Donc l'équation devient dans le domaine de Laplace :

$$a\,p^2 S(p) + b\,pS(p) + c\,S(p) = \frac{E_0}{p}$$

(b) Résolution dans Laplace

$$\left(a\,p^2 + b\,p + c\right) S(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{E_0}{p\,\left(a\,p^2 + b\,p + c\right)}$$

> Dans cette méthode, le polynôme caractéristique apparaît naturellement.

(c) Décomposition en élément simple : En considérant la forme de $S(p)$, on est certain que l'on pourra proposer une forme

$$S(p) = \frac{Ap + B}{a\,p^2 + b\,p + c} + \frac{C}{p}$$

Mais peut-on décomposer le dénominateur avec p^2 ? Si on s'autorise des racines complexes, la réponse est toujours oui. Dans le cas présent, on a dit que les $\Delta > 0$, le polynôme a donc deux racines r_1 et r_2 et donc $a\,p^2 + b\,p + c = a(p - r_1)(p - r_2)$.

On préférera noter $p_1 = -r_1$ et $p_2 = -r_2$ car dans les cas rencontrés, p_1 et p_2 seront ainsi positifs. On aura donc $a\,p^2 + b\,p + c = a(p + p_1)(p + p_2)$

$$S(p) = \frac{A}{p + p_1} + \frac{B}{p + p_2} + \frac{C}{p}$$

La mise au même dénominateur nous donne

$$S(p) = \frac{p^2\,(A + B + C) + p\,(A\,p_2 + B\,p_1 + (p_1 + p_2)C) + C\,p_1\,p_2}{p(p + p_1)(p + p_2)} = \frac{\frac{E_0}{a}}{p(p + p_1)(p + p_2)}$$

Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A\,p_2 + B\,p_1 + C\,(p_1 + p_2) = 0 \\ C\,p_1\,p_2 = \frac{E_0}{a} \end{cases}$$

On sait que $p_1 \times p_2 = (-r_1) \times (-r_2) = \frac{c}{a}$ et donc la dernière équation donne $C = \frac{E_0}{c}$. C'est le résultat de l'étape (b) de la méthode pré-bac.

La première équation $(eq1)$: $A + B + C = 0$ correspond à l'équation $s(0) = 0$ en étape (d) de la méthode pré-bac.

En écrivant $(p_1+p_2)(eq1)-(eq2)$ on trouve $p_1\,A+p_2\,B=0$ ce qui est l'équivalent de l'équation $s'(0)=0$ en étape (d) de la méthode pré-bac.

Il n'est pas toujours facile de suivre les calculs symboliques mais c'est important de pouvoir le faire si on veut visualiser des généralités. Ici on arrive à voir que les deux méthodes reviennent au même.

$$C=\frac{E_0}{c}\qquad A=-\frac{p_2}{p_2-p_1}\cdot\frac{E_0}{c}\qquad B=-\frac{p_1}{p_1-p_2}\cdot\frac{E_0}{c}$$

(d) Retour en temporel :

$$s(t)=(A\exp(-p_1\,t)+B\exp(-p_2\,t)+C)\,\mathcal{U}(t)$$

Soit pour $t\geqslant 0$

$$s(t)=A\exp(-p_1\,t)+B\exp(-p_2\,t)+C$$

Exemple : Le calcul est exactement le même...

Là encore, l'intérêt de Laplace n'est pas évident. Les calculs sont les mêmes dans les deux cas, ils sont seulement faits dans des ordres différents. Voyons pourtant les avantages de Laplace :

- Le calcul est (toujours le même argument) automatique. Les transformées de Laplace des fonctions usuelles sont connues.
- Les transformées de Laplace des fonctions qui nous intéressent sont des fonctions rationnelles en p, c'est à dire des fractions de polynômes. Il se trouve que les ordinateurs sauront très bien gérer de telles fonctions.
- La décomposition en élément simple est automatique pour un ordinateur. Il pourrait arriver que la factorisation du polynôme nécessite des calculs approximatifs mais ce n'est pas grave : les problèmes qui nous intéressent sont des problèmes réels et toutes les valeurs sont approximatives. La physique ne connaît pas les valeurs exactes.
- On n'a pas vraiment besoin de calculer A, B et C dans le cas Laplace. Par exemple, le **théorème de la valeur finale** nous dit que

$$\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}p\cdot S(p)$$

  Dans notre exemple,

$$p\,S(p)=\frac{E_0}{a\,p^2+b\,p+c}\xrightarrow{p\to 0}\frac{E_0}{c}$$

  Nous obtenons donc directement $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}s(t)=\frac{E_0}{c}$ sans avoir à faire la moindre factorisation ou décomposition.

  Nombre d'observations utiles seront semblables. On peut raisonner sur s en utilisant $S(p)$ ce qui évite tous les calculs et rend la méthode de Laplace très efficace.

I.3 Cas $\Delta < 0$

Travail sur le polynôme caractéristique

Quelque soit la méthode, l'équation $as'' + bs' + cs = e$ demande de considérer le trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$. Ce trinôme peut toujours se mettre sous sa forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a\,x^2 - 2\alpha\,x + a\alpha^2 + \beta$$

On en déduit qie $b = -2\alpha a \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$ et $a\alpha^2 + \beta = c \Rightarrow \beta = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$
Donc en général (et indépendamment des équations différentielles),

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Dans le cas $\Delta < 0$, on peut poser $\omega_0 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $m = \frac{b}{2a}$ ce qui donne :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left[(x+m)^2 + \omega_0^2\right]$$

Exemple réaliste avec $L = 30\,mH$, $C = 1\,\mu F$ et $R = 200\,\Omega$, alors :
$30 \times 10^{-9}\,s'' + 150 \times 10^{-6}\,s' + 1$

- $m = \frac{150\times10^{-6}}{2\times30\times10^{-9}} = 2500$
- $\Delta = (150 \times 10^{-6})^2 - 4 \times 30 \times 10^{-9} \times 1 = -97,5 \times 10^{-9} < 0$
- $\omega_0 = \frac{\sqrt{97,5\times10^{-9}}}{2\times30\times10^{-9}} \simeq 5200$

Et $30 \times 10^{-9}\,x^2 + 150 \times 10^{-6}\,x + 29 \simeq 30 \times 10^{-9} \times \left[(x+2500)^2 + (5200)^2\right]$

Méthode pré-bac

$$as'' + bs' + cs = E_0 \quad s(0) = s'(0) = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

(a) Résoudre $as'' + bs' + cs = 0$
On considère $a\,r^2 + b\,r + c = 0$, comme $\Delta < 0$ nous avons deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -m - i\omega_0 \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -m + i\omega_0$$

Et donc $s_0(t) = [A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)]\exp(-m\,t)$ ou encore (plus physicien) $s_0(t) = A\cos(\omega_0\,t + \varphi)\exp(-m\,t)$.

(b) Solution particulière : On cherche $s_1 = C$ donc $s_1' = s_1'' = 0$ et en remplaçant on a :

$$a \times 0 + b \times 0 + c \times C = E_0 \Rightarrow C = \frac{E_0}{c}$$

Donc $s_1(t) = \frac{E_0}{c}$ est une solution particulière de l'équation.

(c) $s(t) = s_1(t) + s_0(t) = \frac{E_0}{c} + [A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)]\,\exp(-m\,t)$ est solution générale de l'équation.

(d) On cherche les valeurs de A et B telles que $s(0) = s'(0) = 0$.

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{E_0}{c} + A \times 1 + B \times 0 = 0 \Rightarrow A = -\frac{E_0}{c}$$

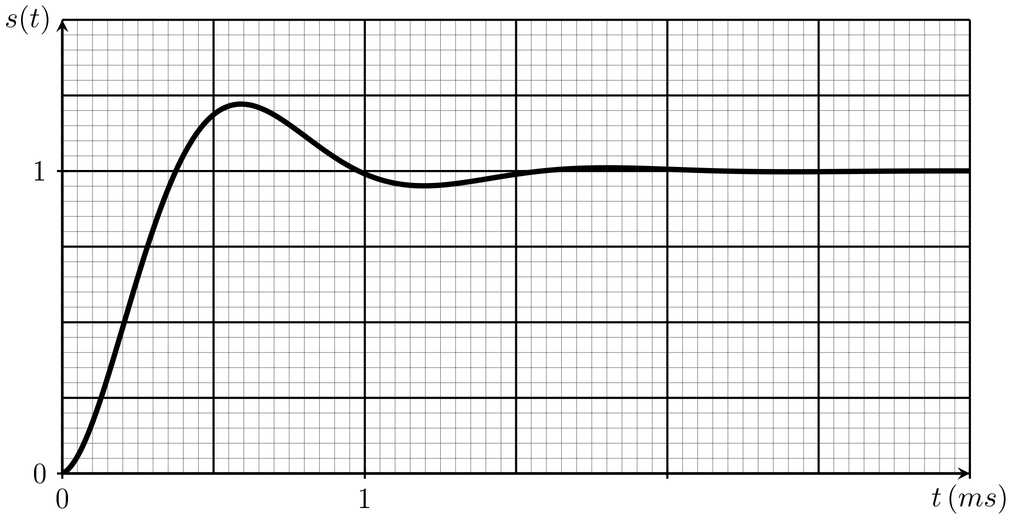
Le calcul de $s'(t)$ est plus délicat...

$$s'(t) = [(-m \cdot A + B \cdot \omega_0)\cos(\omega_0\,t) + (-m \cdot B - A \cdot \omega_0)\sin(\omega_0\,t)]\,\exp(-m\,t)$$

$$s'(0) = 0 \Rightarrow -m \cdot A + B \cdot \omega_0 = 0 \Rightarrow B = \frac{m \cdot A}{\omega_0} = -\frac{m \cdot E_0}{c\omega_0}$$

Exemple : $30 \times 10^{-9}\, s'' + 150 \times 10^{-6}\, s' + 1 = 1 \quad s(0) = s'(0) = 0$
On sait déjà que $\Delta < 0$, $m = 2500$ et $\omega_0 \simeq 5200$.
$C = \frac{E_0}{c} = 1$, $A = -\frac{E_0}{c} = -1$ et $B = -\frac{m \cdot E_0}{c\omega_0} \simeq -0,48$, et donc :

$$s(t) \simeq 1 - [\cos(5200\, t) + 0,48 \sin(5200\, t)] \exp(-2500\, t)$$



Méthode Laplace

$$as'' + bs' + cs = E_0 \quad s(0) = s'(0) = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

(a) Passage de l'équation dans le domaine de Laplace :
$s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$
$s'(t) \xrightarrow{TL} p\, S(p) - s(0) = p\, S(p)$
$s''(t) \xrightarrow{TL} p\,(p\, S(p)) - s'(0) = p^2\, S(p)$
$e(t) \xrightarrow{TL} \frac{E_0}{p}$
Donc l'équation devient dans le domaine de Laplace :

$$a\, p^2 S(p) + b\, pS(p) + c\, S(p) = \frac{E_0}{p}$$

(b) Résolution dans le domaine de Laplace :

$$(a\, p^2 + b\, p + c) S(p) = \frac{E_0}{p}$$

Identique au cas $\Delta > 0$. Le polynôme apparaît naturellement.

$$S(p) = \frac{E_0}{p(a\, p^2 + b\, p + c)}$$

(c) Décomposition en éléments simples. Cette forme semble naturelle :

$$S(p) = \frac{C}{p} + \frac{Ap + B}{a\, p^2 + b\, p + c}$$

Comme on sait que $\Delta < 0$, on sait qu'on ne pourra pas séparer le bloc de droite en deux blocs plus simples (car on veut rester en réels). En revanche on sait que $a\, p^2 + b\, p + c = a\left[(p+m)^2 + \omega_0^2\right]$, on propose donc :

$$S(p) = \frac{C}{p} + \frac{Ap+B}{(p+m)^2+\omega_0^2}$$

La mise au même dénominateur nous donne :

$$S(p) = \frac{(A+C)p^2 + (B+2m\,C)p + C(m^2+\omega_0^2)}{p\,\left((p+m)^2+\omega_0^2\right) = \frac{\frac{E_0}{a}}{\cdots}}$$

avec $m^2+\omega_0^2 = \frac{c}{a}$ (remplacez m et ω_0 par leurs formules pour vous en convaincre)
Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} A+C=0 \Rightarrow A=-C=-\frac{E_0}{c} \\ B+2m\,C=0 \Rightarrow B=-2m\,C=-2m\,\frac{E_0}{c} \\ C\cdot\frac{c}{a}=\frac{E_0}{a} \Rightarrow C=\frac{E_0}{c} \end{cases}$$

Au final :

$$S(p) = \frac{E_0}{c}\cdot\frac{1}{p} - \frac{E_0}{c}\cdot\frac{p+2m}{(p+m)^2+\omega_0^2}$$

(d) Passage en temporel, on remet un peu en forme :

$$S(p) = \frac{E_0}{c}\cdot\frac{1}{p} - \frac{E_0}{c}\cdot\frac{p+m}{(p+m)^2+\omega_0^2} - \frac{m\,E_0}{c\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{(p+m)^2+\omega_0^2}$$

On reconnaît un $cos(\omega_0 t)\exp(-m\,t)$ en 2e position et $\sin(\omega_0 t)\exp(-m\,t)$ en 3e.

$$s(t) = \mathcal{U}(t)\left\{\frac{E_0}{c} - \frac{E_0}{c}\cdot\cos(\omega_0 t)\exp(-m\,t) - \frac{m\,E_0}{c\omega_0}\cdot\sin(\omega_0\,t)\exp(-m\,t)\right\}$$

soit pour $t \geqslant 0$ et un peut de factorisation :

$$s(t) = \frac{E_0}{c}\left\{1 - \left[\cos(\omega_0 t) + \frac{m}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]\exp(-mt)\right\}$$

Exemple : Je ne reprends pas l'exemple précédent, le calcul est exactement le même.

Quand on écrit $a\,s'' + b\,s' + c\,s$, on ne voit pas clairement les deux éléments importants que sont m et ω_0. On peut alors réécrire l'équation $a\left[s'' + 2ms' + \left(m^2+\omega_0^2\right)s\right]$ pour les faire apparaître.

On constate que le terme en s' induit un **amortissement** m qui est responsable du terme en $\exp(-mt)$ de la solution. En l'absence du terme s', la solution serait une pure oscillation, infinie, donc pas très réaliste.

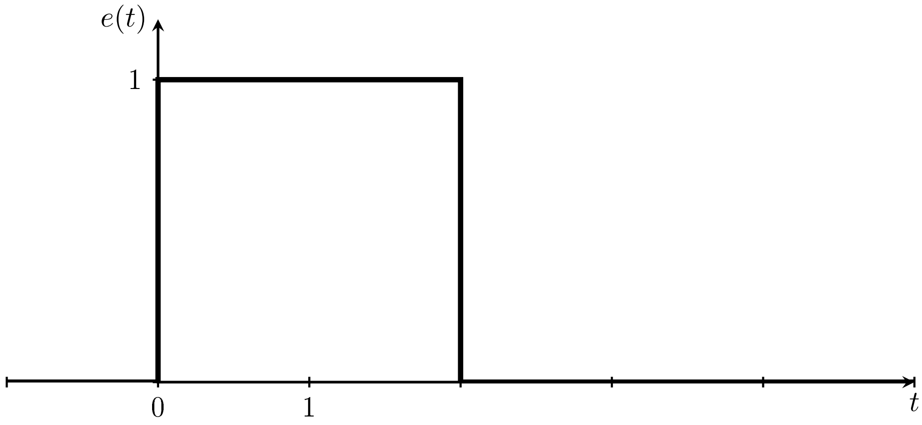
Le terme en s' correspond physiquement à ce qui dissipe l'énergie : effet Joule dans la résistance, frottement...

II Le retard

Voyons maintenant le cas d'utilisation d'un retard. Prenons une simple équation du premier ordre comme :

$$2\,s' + s = e, \quad s(0) = 0$$

Supposons que $e(t)$ soit décrit par la courbe suivante :



On souhaite déterminer l'expression de $s(t)$ pour $t \geqslant 0$ et tracer sa courbe.

Méthode pré-bac

- On commence à résoudre pour $t \in [0; 2]$ où $e(t) = 1$. On a alors :

$$2\,s' + s = 1, \quad s(0) = 0$$

(a) $2\,s' + s = 0 \Rightarrow s_0(t) = K\ \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$

(b) $s_1(t) = C \Rightarrow 2 \times 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

(c) $s(t) = s_1(t) + s_0(t) = 1 + K\ \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$

(d) $s(0) = 0 \Rightarrow 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1$

Donc $s(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$ pour $t \in [0; 2]$.
On en déduit que $s(2) = 1 - \exp(-1)$.

- Puis on doit résoudre pour $t \geqslant 2$ où $e(t) = 0$. On a alors :

$$2\,s' + s = 0, \quad s(2) = 1 - \exp(-1)$$

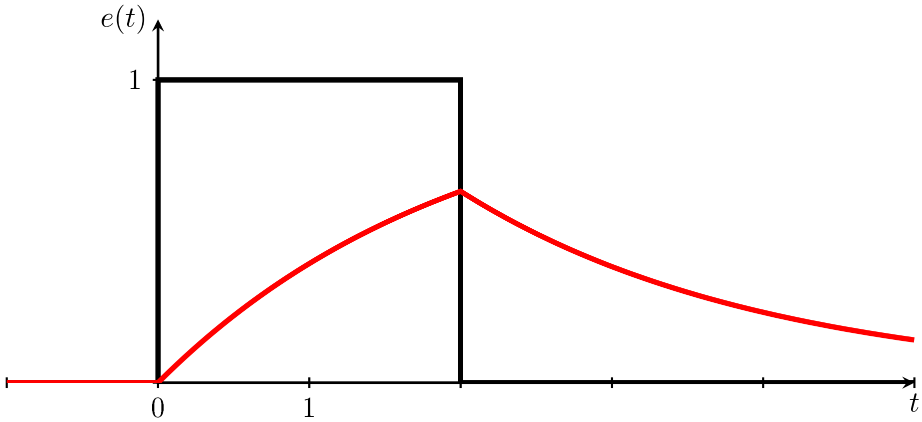
(a) $s_0(t) = K\ \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$

(b) $s_1(t) = 0$

(c) $s(t) = s_1(t) + s_0(t) = K\ \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$

(d) $s(2) = 1 - \exp(-1) \Rightarrow K\ \exp(-1) = 1 - \exp(-1) \Rightarrow K = \exp(1) - 1$

Donc $s(t) = (\exp(1) - 1)\ \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$ pour $t \geqslant 2$.



Méthode Laplace

On exprime $e(t)$ globalement en utilisant $\mathcal{U}(t)$.

$$e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)$$

On va pouvoir résoudre en un seul calcul :

1. $s(t) \xrightarrow{TL} S(p) \qquad s'(t) \xrightarrow{TL} p\,S(p) - s(0) = p\,S(p) \qquad e(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\exp(-2p)$
2. Équation en Laplace
$$2p\,S(p) + S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\exp(-2p)$$
3. Résolution en Laplace
$$S(p) = \frac{1}{p(2p+1)} - \frac{1}{p(2p+1)}\exp(-2p)$$
4. Décomposition. On a deux fois la même fraction $\frac{1}{p(2p+1)}$ à décomposer :
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p+\frac{1}{2}} = \frac{ap + \frac{a}{2} + bp}{p\left(p+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2ap + 2bp + a}{p(2p+1)}$$
On en déduit que $a = 1$ et donc $b = -1$ soit :
$$S(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right)\exp(-2p)$$
5. Retour en temporel
$$s(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\mathcal{U}(t) - \left[1 - \exp\left(-\frac{t-2}{2}\right)\right]\mathcal{U}(t-2)$$
Soit, si on décompose :
- pour $t \in [0;2]$, $s(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$
- pour $t \geqslant 2$, $s(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{2}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{t-2}{2}\right)$
Or, $\exp\left(-\frac{t-2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{t}{2}+1\right) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\cdot\exp(1)$ et on retrouve bien la même expression qu'avec la méthode pré-bac.

Bien que plus abstraite, la méthode de Laplace a l'avantage de faire tout d'un coup sans qu'on ait à se poser de question. Exactement ce que les ordinateurs adorent...

III Mode harmonique

III.1 Impédances complexes

Une résistance à une loi de fonctionnement simple : $U = R\,I$ et cela reste vrai si les grandeurs varient : $u = R\,i$ (on note souvent, en Physique, les grandeurs variables avec des petites lettres)

C'est plus compliqué pour un condensateur : $i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. De ce fait, si par exemple $C = 1$ et $u = \cos(3\,t) + t$, alors i est complètement différent : $i = -3\sin(3\,t) + 1$.

Dans le cas particulier de grandeurs sinusoïdales, on a l'idée d'utiliser les nombres complexes. On dit, si $u(t) = U_0\cos(\omega\,t + \varphi)$, on va utiliser une grandeur complexe $u^*(t) = U_0\mathrm{e}^{j(\omega\,t+\varphi)}$.

Dans cette notation, j est le nombre tel que $j^2 = -1$. On utilise j au lieu de i pour éviter de confondre avec l'intensité.

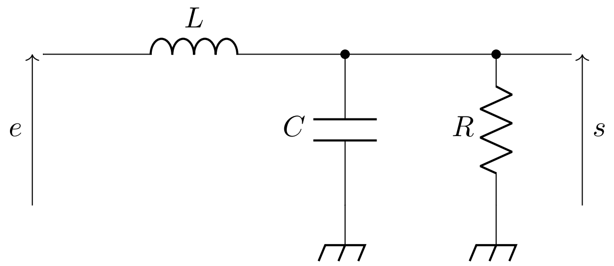
L'étoile de u^* est là pour rappeler que ce n'est pas vraiment la tension u mais une grandeur complexe que nous n'utilisons que parce qu'elle est pratique. Tout du long on devra se rappeler que le vrai u est en fait $u = Re(u^*)$.

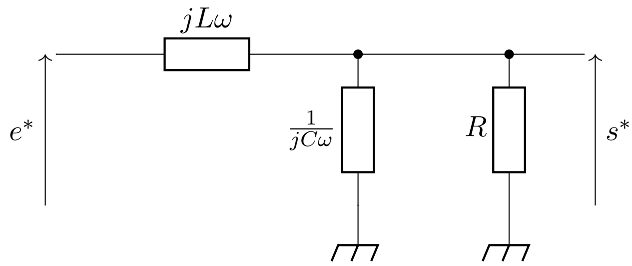
L'avantage de l'opération est que la formule $i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ devient :

$$i^* = C\,\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}t} = C \times j\omega\,U_0\mathrm{e}^{j(\omega\,t+\varphi)} = jC\omega u^*$$

Autrement dit, $u^* = \frac{1}{jC\omega}i^* = Z_C\,i^*$. Tout se passe comme si C était devenu une sorte de résistance de valeur complexe.

Le même raisonnement sur une bobine L conduit à la considérer comme une "résistance" de valeur $jL\omega$.



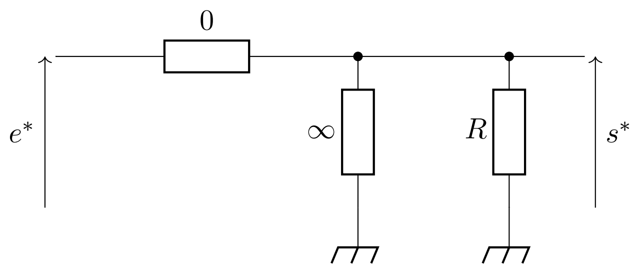


Et le calcul se fait comme si on n'avait que des résistances. On parle d'**impédances complexes**.

III.2 Passe haut ? Passe bas ?

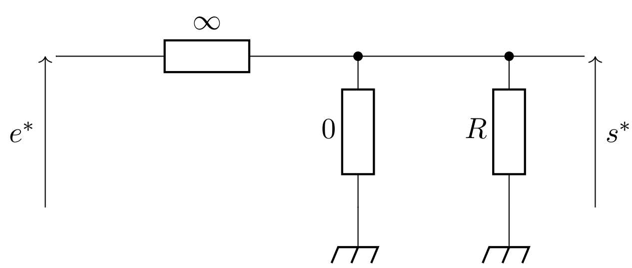
Ce travail nous permet de voir vite si un montage est plutôt passe haut ou passe bas.

$\omega \to 0$



Dans ce cas la bobine devient un simple fil et e est relié directement à s. On a $s = e$.

$\omega \to +\infty$



Dans ce cas, la bobine bloc tout passage de courant et le condensateur est comme un court-circuit. On a $s = 0$.

Donc à faible fréquence, $s = e$, à forte fréquence, $s = 0$. On a donc un **filtre passe bas**.

III.3 Généralisation avec Laplace

L'astuce des impédances complexes ne fonctionne qu'en régime harmonique, c'est à dire si la tension d'entrée est une sinusoïde.

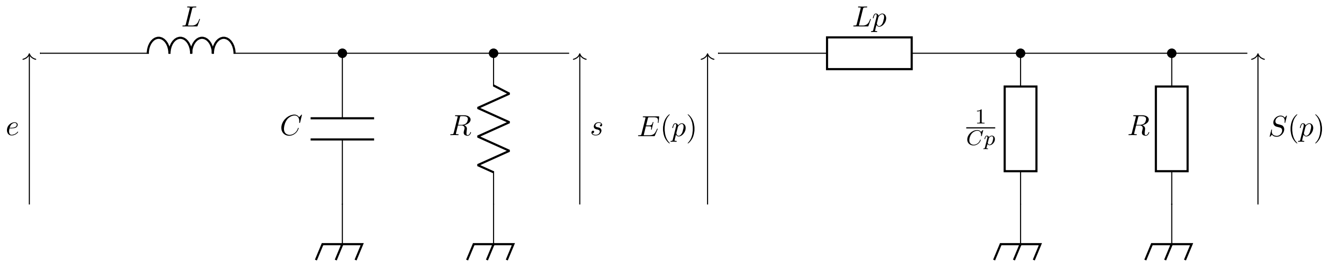
On peut généraliser avec Laplace.

Prenons le cas du condensateur : $i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Donc en passant en Laplace :
$I(p) = C(p \cdot U(p) - u(0^+))$.

Mais on sait de plus que l'énergie stockée dans un condensateur est $\frac{1}{2}Cu^2$ et que l'énergie doit varier continûment. Donc u continu et donc $u(0^+) = u(0^-) = 0$. On peut donc conclure :

$$I(p) = Cp\,U(p) \Rightarrow U(p) = \frac{1}{Cp}I(p)$$

On retrouve le $\frac{1}{jC\omega}$ précédent, avec $p = j\omega$, sauf que maintenant ce n'est plus réservé au cas harmonique. Par le même raisonnement, pour une bobine : $U(p) = Lp\,I(p)$.



On a deux options, et **on préfère la seconde** :

i. Étudier le circuit de gauche, poser l'équation différentielle en temporel, passer ensuite en Laplace.
ii. Passer le circuit en Laplace, étudier le circuit sous cette forme et obtenir l'équation en Laplace.

Dans le cas présent, le **théorème de Millman** donne directement la réponse :

$$S(p) = \frac{\frac{E(p)}{Lp}}{\frac{1}{Lp} + \frac{1}{R} + Cp}$$

III.4 Fonction de transfert

$$S(p) = \frac{1}{LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1}E(p)$$

Cette écriture met en évidence que S dépendra :

- du circuit, c'est $H(p)$
- de ce qu'on met en entrée, c'est $E(p)$.

Si on modifie l'entrée, $E(p)$ change mais pas $H(p)$.

On appelle $H(p)$ la fonction de transfert. H contient toute l'information qu'il y a à connaître sur le circuit. Deux circuit avec le même H, quelle que soit leur composition, auront le même fonctionnement.

III.5 Calcul de $s(t)$

Supposons que l'on connaisse $H(p)$. Par exemple $H(p) = \frac{100}{p^2+8p+100}$. Supposons que $e(t) = \cos(\omega\,t)$ pour $t \geqslant 0$. Que vaut $s(t)$?

Pour résoudre on dirait $e(t) = E_0\cos(\omega\,t)\mathcal{U}(t) \Rightarrow E(p) = E_0\frac{p}{p^2+\omega^2}$ et donc :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{100}{p^2 + 8p + 100} \times E_0\frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Après il faudrait décomposer en éléments simples, ce qui serait pénible... Y a-t-il moyen d'éviter ce calcul ?

Explication technique...

On sait déjà que l'on aurait :

$$S(p) = \frac{?_1}{p^2 + 8p + 100} + \frac{?_2}{p^2 + \omega^2}$$

La partie de gauche correspond à des phénomènes qui dépendent uniquement du circuit. Ce sont généralement des **phénomènes transitoires**, c'est à dire qu'ils ne durent que quelques instants après la mise en route.

- Si on s'intéresse à la mise en route du système, on doit calculer le terme $?_1$.
- Si on s'intéresse au fonctionnement permanent, celui que l'on atteint après quelques secondes et que l'on visualise sur l'oscilloscope, seul $?_2$ est important.

Voyons comment obtenir $?_2$ sans trop de calcul : Posons d'abord $?_2 = ap + b$ avec a et b réels.

$$S(p) \times (p^2 + \omega^2) = H(p) \cdot E_0 \cdot p = \frac{?_1 \times (p^2 + \omega^2)}{p^2 + 8p + 100} + ap + b$$

Et maintenant prenons $p = j\omega$, alors $p^2 + \omega^2 = 0$ et donc

$$H(j\omega) \cdot E_0 \cdot j\omega = 0 + aj\omega + b$$

Soit $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = arg(H(j\omega))$.
Soit $H(j\omega) = G\,\mathrm{e}^{j\varphi}$ et

$$aj\omega + b = G\,\mathrm{e}^{j\varphi} E_0 \cdot j\omega$$

Donc $a = E_0\,G\,\cos(\varphi)$ et $b = E_0\,G\,sin(\varphi)\,\omega$

$$S(p) = (transitoire) + E_0\,G\,\cos(\varphi)\frac{p}{p^2 + \omega^2} + E_0\,G\,\sin(\varphi)\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Retour en temporel, avec $t > 0$:

$$s(t) = (transitoire) + G \times E_0\,\cos(\varphi)\cos(\omega t) + G \times E_0\,\sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

On arrive à la conclusion que

$$s(t) = (transitoire) + G \times E_0 \cos(\omega\,t - \varphi) \quad \text{avec } H(j\omega) = G\mathrm{e}^{j\varphi}$$

La conclusion est que la fonction de transfert en régime harmonique n'est autre que $H(p)$ dans lequel on remplacerait p par $j\omega$.

Donc si on connaît $H(p)$ et que l'on envisage une entrée harmonique, comme $e(t) = E_0 \cos(\omega\,t)$, et que l'on ne s'intéresse qu'au régime permanent (quand les phénomènes transitoires ont disparu) inutile de s'embêter avec de longs calculs de décomposition en éléments simples. Il suffit de calculer $H(j\omega)$ et de déterminer son module G et son argument φ. On ara $s(t) = G \cdot E_0 \cos(\omega\,t - \varphi)$.

Si c'est un sin, la réponse est la même avec sin à la place de cos.

Il peut arriver que le terme transitoire ne disparaisse pas. Ce serait le cas par exemple pour $H(p) = \frac{1}{p^2+25}$ (l'absence de terme en p au dénominateur correspond à une oscillation non amortie donc infinie dans le temps).
Dans ce cas, on dit que le système est instable. Si on le pousse légèrement de son équilibre, il ne revient pas à l'équilibre. On essaie d'éviter cette situation.