1 Premier exemple

On considère l'équation : $(\mathcal{E}) : 2s' + s = 1$ pour $t \geqslant 0$ et $s(0) = 0$.

1.1 Reformuler un peu

L'écriture de $\mathcal{E}$ est une écriture un peu physique. Dans le cadre un peu plus formel des maths, en vue d'utiliser Laplace, on traduirait $t \geqslant 0$ par la présence d'un $\mathcal{U}(t)$ et on préciserait les (t), donc :

$$(\mathcal{E}) : 2s'(t) + s(t) = \mathcal{U}(t) \quad ; s(0) = 0$$

On pourrait même décomposer en écrivant :

$$(\mathcal{E}) : 2s'(t) + s(t) = e(t) \quad ; e(t) = \mathcal{U}(t) \quad ; s(0) = 0$$

1.2 Passage dans le domaine de Laplace

On détaille un peu :

- $s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$
- $s'(t) \xrightarrow{TL} p \cdot S(p) - \cancel{s(0)}$
- $e(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{1}{p}$

En remplaçant ces éléments dans $\mathcal{E}$ on obtient :

$$(\mathcal{E}) : 2p\, S(p) + S(p) = \frac{1}{p}$$

1.3 Résolution dans le domaine de Laplace

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) : 2p\, S(p) + S(p) &= \frac{1}{p} \\ (2p+1)\, S(p) &= \frac{1}{p} \\ S(p) &= \frac{1}{p(2p+1)} \end{aligned}$$

C'est déjà terminé.

1.4 Retour dans le domaine temporel

On sait que $S(p) = \frac{1}{p(2p+1)}$ et on souhaite trouver $s(t)$. Mais on ne peut pas sous cette forme. Il faut décomposer $S(p)$ en élément simple.

C'est là qu'il y a le plus de calculs. Pour l'instant, je me contente de donner directement la réponse. Je détaillerai ensuite comment on peut trouver cela.

On admet – pour l'instant – que $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p + \frac{1}{2}}$

Le retour au temporel est immédiat :

$$s(t) = \mathcal{U}(t) - \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\mathcal{U}(t)$$

Soit dans une écriture plus **physique** :

Pour $t \geqslant 0$, $s(t) = 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{2}t\right)$

1.5 Détails de la décomposition

Un peu d'entraînement avec les décomposition nous permet de deviner que :

$$S(p) = \frac{1}{p(2p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1}$$

On met la partie de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1} = \frac{2ap + a + bp}{p(2p+1)}$$

On déduit donc le système :

$$\begin{cases} 2a + b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases}$$

On déduit $a = 1$ et $b = -2$ soit :

$$S(p) = \frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{2}{2p+1}\frac{\times\frac{1}{2}}{\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

2 Second exemple

Plus compliqué : $(\mathcal{E}) : 2s' + s = \cos(3t)$ pour $t \geqslant 0$ et $s(0) = 0$.

Vous auriez beaucoup de mal à résoudre cette équation en n'utilisant que les méthodes pré-bac.

2.1 Reformuler un peu

$$(\mathcal{E}) : 2s'(t) + s(t) = \cos(3t)\,\mathcal{U}(t) \quad ; s(0) = 0$$

On pourrait même décomposer en écrivant :

$$(\mathcal{E}) : 2s'(t) + s(t) = e(t) \quad ; e(t) = \cos(3t)\,\mathcal{U}(t) \quad ; s(0) = 0$$

2.2 Passage dans le domaine de Laplace

On détaille un peu :

- $s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$
- $s'(t) \xrightarrow{TL} p \cdot S(p) - \cancel{s(0)}$
- $e(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{p}{p^2+9}$

En remplaçant ces éléments dans $\mathcal{E}$ on obtient :

$$(\mathcal{E}) : 2p\,S(p) + S(p) = \frac{p}{p^2+9}$$

2.3 Résolution dans le domaine de Laplace

$$(\mathcal{E}) : 2p\,S(p) + S(p) = \frac{p}{p^2+9}$$

$$(2p+1)\,S(p) = \frac{p}{p^2+9}$$

$$S(p) = \frac{p}{(2p+1)(p^2+9)}$$

C'est déjà terminé et ce n'était pas plus difficile que dans le cas précédent.

2.4 Retour dans le domaine temporel

On sait que $S(p) = \frac{p}{(2p+1)(p^2+9)}$ et on souhaite trouver $s(t)$. Mais on ne peut pas sous cette forme. Il faut décomposer $S(p)$ en élément simple.

La décomposition est fastidieuse – c'est à dire longue, casse-pieds, répétitive – mais pas difficile. C'est typiquement le genre de travail à donner à une machine. Comme avant, je donne le détail ensuite.

On admet – pour l'instant – que

$$S(p) = \frac{1}{37}\left(\frac{-1}{p+\frac{1}{2}} + \frac{p+18}{p^2+9}\right)$$

- On reconnaît $\frac{1}{p+\frac{1}{2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\mathcal{U}(t)$
- On reconnaît $\frac{p}{p^2+9} \xrightarrow{TL^{-1}} \cos(3t)\mathcal{U}(t)$
- On reconnaît $\frac{3}{p^2+9} \xrightarrow{TL^{-1}} \sin(3t)\mathcal{U}(t)$

On déduit donc

$$S(p) = \frac{1}{37}\left(\frac{-1}{p+\frac{1}{2}} + \frac{p}{p^2+9} + 6\frac{3}{p^2+9}\right)$$

devient

$$s(t) = \frac{1}{37}\left[-\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) + \cos(3t) + 6\sin(3t)\right]\mathcal{U}(t)$$

Soit pour un physicien

$$s(t) = \frac{1}{37}\left[-\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) + \cos(3t) + 6\sin(3t)\right] \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

Je vous renvoie en partie 3 pour une interprétation plus physique de ce résultat.

2.5 Détails de la décomposition

Un peu d'entraînement avec les décomposition nous permet de deviner que :

$$S(p) = \frac{p}{(2p+1)(p^2+9)} = \frac{a}{2p+1} + \frac{bp+c}{p^2+9}$$

On met la partie de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{2p+1} + \frac{bp+c}{p^2+9} = \frac{ap^2+9a+2bp^2+bp+2cp+c}{(2p+1)(p^2+9)}$$

On déduit donc le système :

$$\begin{cases} 2a+2b & = 0 \\ b+2c & = 1 \\ 9a+c & = 0 \end{cases}$$

La résolution prend un peu de temps. Mais avec une calculatrice on obtient la réponse directement – *J'insiste : ces outils sont faits pour permettre un traitement quasiment automatique par ordinateur.*

La première équation nous dit $a = -2b$, la troisième nous dit $c = -9a \Rightarrow c = 18b$ et donc on obtient avec la deuxième équation :

$$b + 36b = 1 \Rightarrow 37b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{37}$$

Ce qui permet de déduire $a = -\frac{2}{37}$ et $c = \frac{18}{37}$

$$S(p) = \frac{1}{37}\left(\frac{-2}{2p+1}\frac{\times\frac{1}{2}}{\times\frac{1}{2}} + \frac{p+18}{p^2+9}\right)$$

$$S(p) = \frac{1}{37}\left(\frac{-1}{p+\frac{1}{2}} + \frac{p+18}{p^2+9}\right)$$

3 Interprétation plus physique pour le 2e exemple

$$s(t) = \frac{1}{37}\left[-\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) + \cos(3t) + 6\sin(3t)\right] \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

3.1 Régime transitoire

La partie $\frac{-1}{37}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ est temporaire. Elle est liée à la mise en route du système. Très vite, $\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \to 0$ et ce terme disparaît. C'est un **régime transitoire**. On ne pourrait le voir à l'oscilloscope que si on avait un oscilloscope à mémoire et que l'on mémorisait le moment de la mise en route.

3.2 Encore un peu de trigonométrie

Un physicien chercherait sans doute à joindre $a\cos(3t)+b\sin(3t)$ sous la forme $A\cos(3t-\varphi)$. Dans notre cas on a $\cos(3t) + 6\sin(3t)$.

La technique est de chercher $A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$.

Puis on sait que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A} = \frac{1}{\sqrt{37}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A} = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Dans cet exemple, on trouve $\varphi \simeq 1,41$ rad.

Autrement dit, $s(t) = \frac{1}{37}\left(-\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{37}}\cos(3t-\varphi)$.

3.3 Régime harmonique

Si on choisit de négliger le régime transitoire, on voit que notre système reçoit en entrée $\cos(3t)$ et en sortie on récupère $\frac{1}{\sqrt{37}}\cos(3t-\varphi)$ avec $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{37}\right)$. Cela évoque un régime harmonique.

On reconnaît que dans ce régime harmonique, on passe de l'amplitude 1 à l'amplitude $\frac{1}{\sqrt{37}}$, donc on a un gain $G = \frac{1}{\sqrt{37}}$ et on a un déphasage $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{37}\right)$.

Peut-on retrouver ces valeurs sans faire tous ces calculs ?

OUI !

3.4 Fonction de transfert

Dans l'équation d'origine, on avait $(2p+1)\,S(p) = E(p)$, donc on a

$$S(p) = H(p)\cdot E(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{1}{2p+1}$$

$H(p)$ est la fonction de transfert. Pour obtenir le gain $G(j\omega)$ du régime harmonique, tout ce que l'on a à faire, c'est remplacer p par $j\omega$ dans $H(p)$.

$$G(j\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{2j\omega+1}$$

Et donc, dans le cas $\omega = 3$ de l'exemple – car $e(t) = \cos(3t)$ – on aura :

$G = |G(3j)| = \left|\frac{1}{6j+1}\right| = \frac{1}{|6j+1|} = \frac{1}{\sqrt{6^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$