Méthode de Euler

On étudie un système $\quad e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(t)$

on connaît la relation $e \to s$, c'est une équation différentielle. On peut poser que l'on aura toujours $\boxed{s(0)=0}$

On voudrait pouvoir simuler, sur ordinateur, l'évolution de $s(t)$ quelque soit $e(t)$, sans avoir besoin de connaître $e(t)$ à l'avance.

À titre d'exemple, prenons un cas simple du 1er ordre :

$$(E_q) : \; 2\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

Ce que nous avons fait en cours

En cours, nous sommes passé en Laplace :

$$2\,p\,S(p) + S(p) = E(p)$$
$$\Leftrightarrow \quad (2p+1)\,S(p) = E(p)$$
$$\Leftrightarrow \quad S(p) = \frac{1}{2p+1} \cdot E(p)$$

puis nous avons pris le cas $e(t) = \mathcal{U}(t)$ ce qui permet de poursuivre théoriquement :

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{1}{p} \overset{\text{décomposition els simples}}{=} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

de retour en temporel : $s(t) = \mathcal{U}(t) - \exp(-\frac{1}{2}t)\,\mathcal{U}(t)$

$$\boxed{\text{Pour } t \geq 0, \quad s(t) = 1 - \exp(-\tfrac{1}{2}t)}$$

⚠ Je mets exp pour les exponentielles pour ne pas confondre avec e = entrée.

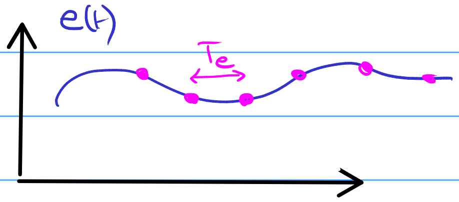
Problème : Nous sommes capables de trouver une expression pour $s(t)$ si nous connaissons d'avance $e(t)$, la totalité de $e(t)$, jusqu'à $t = +\infty$!
Cela ne résout pas notre problème.

Remarque : Ce que nous avons fait n'est pas inutile mais cela ne répond pas au problème qu'on s'est donné ici.

Simulation sur ordinateur

Quand on simule $e(t)$ et $s(t)$ sur ordinateur, on a des signaux comme sont les signaux numériques : échantillonnés.

On convient donc d'une période d'échantillonnage T_e.



On comprend qu'en ne considérant $e(t)$ que tous les $t = nT_e$, on perd quelque chose.

Ce serait mieux que T_e soit petit. Mais T_e trop petit peut poser des difficultés technologiques (notamment demander beaucoup de calculs).

Cas de l'exemple : dans l'exemple précédent, on pourrait choisir $T_e = 0,1$ et on aurait

$$\left.\begin{array}{l} e_n = e(nT_e) = U(nT_e) = 1 \\ \\ s_n = S(nT_e) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} nT_e\right) \end{array}\right\} \text{pour } n \geq 0$$

On peut tracer cela avec une calculatrice en mode suite.

$\boxed{\text{Faites-le !}}$

méthode d'Euler

On n'a toujours pas ce qu'on voulait.
pour l'instant tout ce que nous arrivons à faire, c'est produire un $s(t)$ théorique sur un $e(t)$ théorique connu d'avance.

La méthode d'Euler répond, de façon approximative, au problème.

L'idée est la suivante :

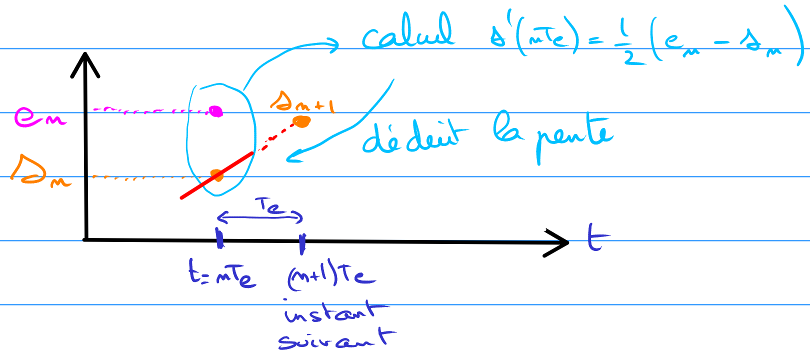
- On sait que $s_0 = s(0) = 0$
- d'après (E_q) on a $s'(t) = \frac{1}{2}\left(e(t) - s(t)\right)$

donc pour $t = nT_e$: $s'(nT_e) = \frac{1}{2}\left(e(nT_e) - s(nT_e)\right)$

- mais s' représente le taux d'accroissement de s

si je connais $s(nT_e)$ et que je suppose (c'est ici qu'on approxime) que $s'(nT_e)$ ne change pas pendant toute la période d'échantillonnage T_e, alors on sait que s va augmenter de $s'(nT_e) \times T_e$

graphiquement :



donc en résumé :

$$E_q : s'_n = \frac{1}{2}(e_n - s_n) \Rightarrow s_{n+1} = s_n + T_e \cdot s'_n = s_n + T_e \cdot \frac{1}{2}(e_n - s_n)$$

Nous avons une récurrence !

$$\boxed{\begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s_{n+1} = s_n + \frac{T_e}{2}(e_n - s_n) \end{array}}$$

vous constatez qu'il suffit de connaître e_n au moment de calculer s_{n+1}. On n'a pas besoin de connaître d'avance tous les e_n. Celui de l'instant présent suffit. On peut travailler en temps réel.

Sur votre calculatrice, calculez les valeurs de s_n. Vous pouvez reprendre $e_n = 1$ et $T_e = 0{,}1$. Comparez avec le résultat théorique obtenu plus tôt. Vous pouvez aussi faire des essais avec T_e moins petit : $T_e = 0{,}5$, $T_e = 1$, pour voir les limites de la méthode.

Remarque la méthode d'Euler fonctionne très bien dans le cas d'un premier ordre. Dans le cas d'un second ordre avec $\sim$, on aura plus de problèmes.

Un peu de théorie $\quad S(p) = H(p) \cdot E(p)$

on peut prouver que cela conduit à $s(t) = \int_0^t h(\tau) e(t-\tau) d\tau$

dans l'exemple, $H(p) = \frac{1}{2p+1} = \frac{\frac{1}{2}}{p+\frac{1}{2}} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}t) U(t) \Rightarrow s(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}\tau) e(t-\tau) d\tau$

ce qui veut dire que l'on peut calculer (de façon compliquée) $s(t)$ en connaissant seulement les $e(t-\tau)$, c'est à dire les $e(t)$ du passé !

exemple

Si on suit l'exemple $e(t) = 1$ (pour $t \geq 0$) on a

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) \cdot 1 \, d\tau = \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) \right]_0^t$$

$$= \left(-\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \right) - \left(-1 \right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$$

on retrouve bien ce qu'on avait théoriquement

On peut décliner ce résultat en version échantillonnée :

$$h_n = h(n Te) \overset{\text{exemple}}{=} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} n T_e\right) \quad n \geq 0$$

$$s_n = Te \sum_{i=0}^{n-1} h_i \, e_{n-i}$$

Avec $Te = 0{,}1$, $e_n = 1$ (exemple)

vérifiez que cela nous donne, approximativement, les bons résultats.

Rmq : votre calculatrice sait faire les Σ !

Rmq 2 : cette technique est plus précise que Euler mais elle est plus compliquée et est plus gourmande en calculs (la machine doit calculer Σ chaque fois.)