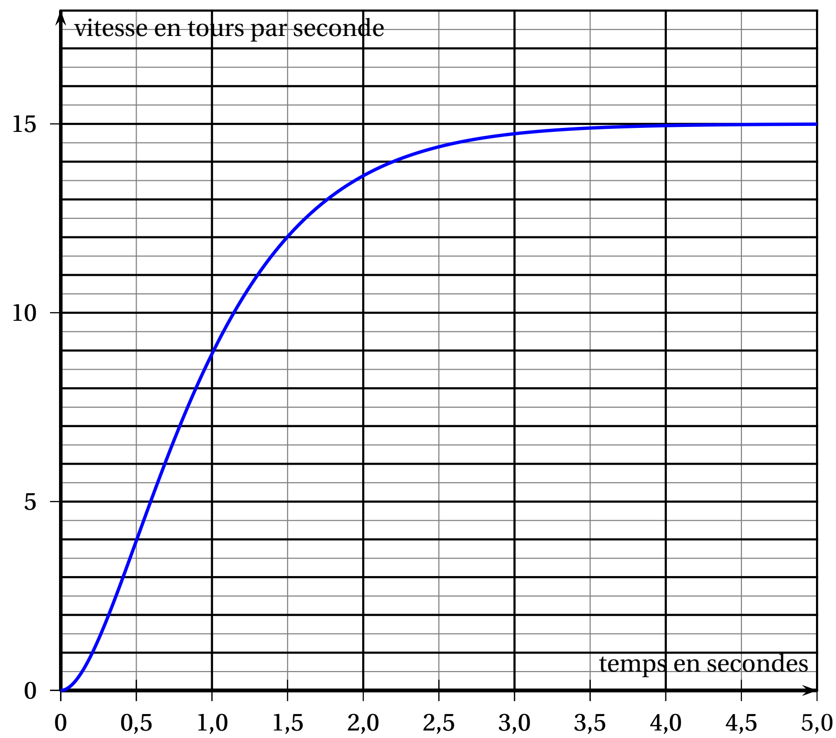
Brevet de technicien supérieur
9 mai 2017 - groupement A1 - CIRA

Exercice 1 **11 points**

Les 4 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω. Elle dépend du temps t , exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur.
La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.
   a. Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant t = 0 ?
   b. Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage ?
   c. Vers quelle valeur COs semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur ?
   d. Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95 % de la vitesse stabilisée. Expliquer.
2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geqslant 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$$

a. On noteω' la fonction dérivée de ω. Justifier que pour $t \geqslant 0$: $\omega'(t) = 60t\mathrm{e}^{-2t}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour les parties B et C de l'exercice

Équation différentielle sans second membre	**Solutions sur $\mathbb{R}$**
$ay'' + by' + cy = 0$ avec a, b et c des constantes réelles. Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	• Si $\Delta > 0$: $t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec A, B constantes réelles et r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique. • Si $\Delta = 0$: $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{rt}$, avec A, B constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique. • Si $\Delta < 0$: $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$, avec A, B constantes réelles et $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ les solutions de l'équation caractéristique.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{U}{k}, \text{ où } k \text{ est une valeur caractéristique du moteur.}$$

1. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E). On a donc :

$$(E_0) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2. Vérifier que la fonction constante g : $t \longmapsto \dfrac{U}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

4. En prenant $k = \dfrac{2}{3}$ et $U = 10$ V montrer que la fonction ω donnée dans la question A. 2. est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

D'une manière plus générale on démontre que la vitesse de rotation du moteur alimenté par une tension continue U vérifie l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad \alpha^2 y'' + 2m\alpha y' + y = \frac{U}{k},$$

où α, m et k sont des paramètres strictement positifs dépendant des caractéristiques physiques du moteur étudié (résistance, inductance, moment d'inertie).

Dans cette partie on prend : $U = 10$ V ; $\alpha = 0,3$; $m = 0,6$ et $k = \dfrac{2}{3}$.

L'équation différentielle (E_1) s'écrit donc :

$$0,09y'' + 0,36y' + y = 15.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $0,09z^2 + 0,36z + 1 = 0$.

2. Parmi les quatre fonctions proposées ci-dessous, une seule est solution de l'équation différentielle (E_1) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Quelle est cette fonction ? Justifier la réponse.

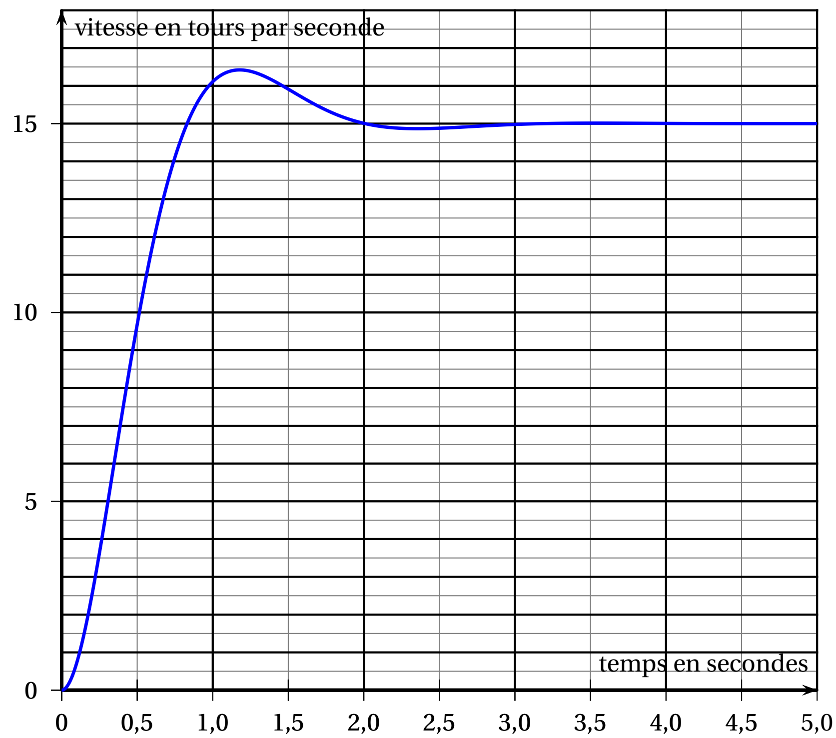
Fonction 1 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{8}{3}t}\left(\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t)\right)\right]$

Fonction 2 : $t \longmapsto 15\left[1 - \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right)\right]$

Fonction 3 : $t \longmapsto 15\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} - 15\mathrm{e}^{-\frac{14}{3}t}$

Fonction 4 : $t \longmapsto 15 - \mathrm{e}^{-2t}\left[\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right]$

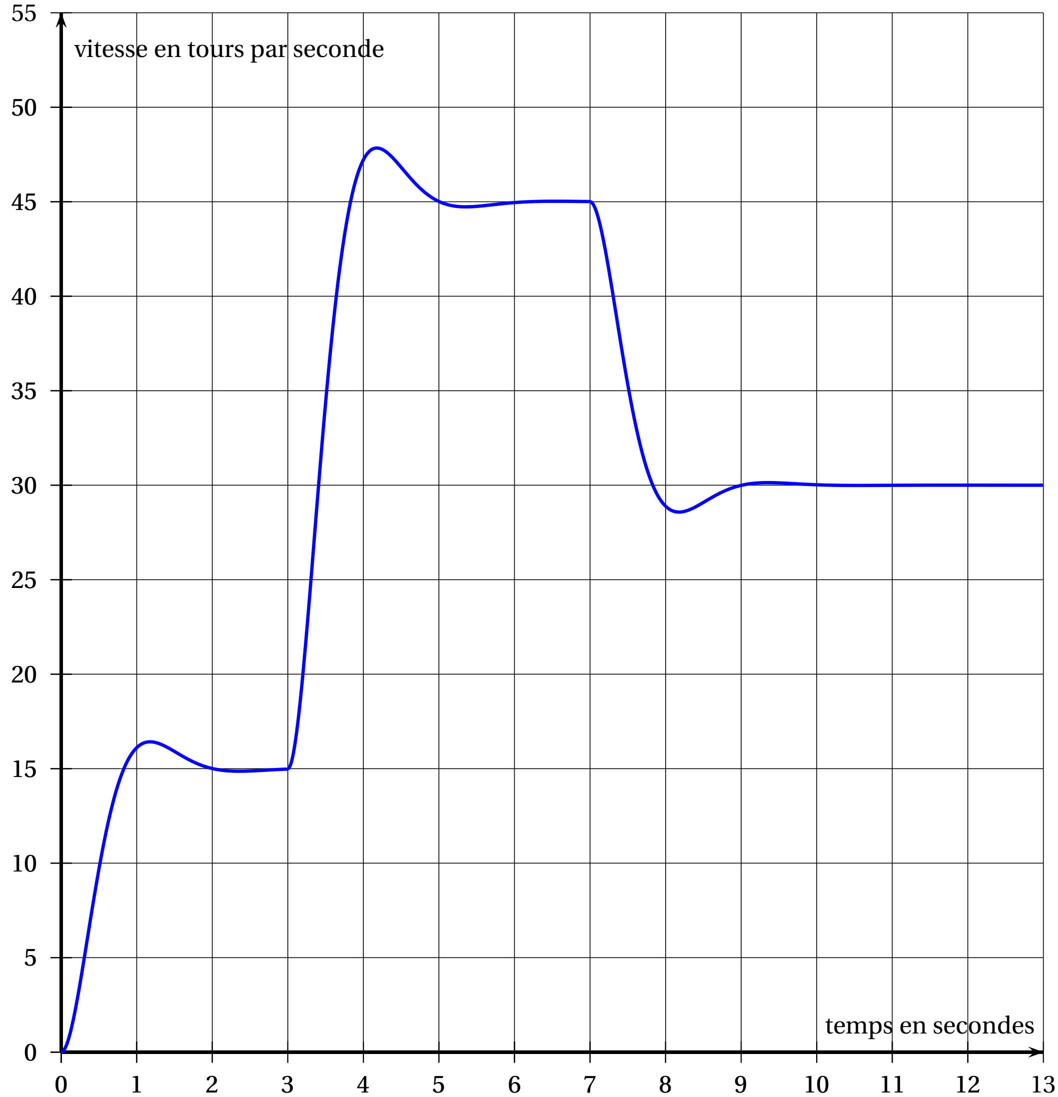
3. La solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ modélise l'évolution de la vitesse du moteur en fonction du temps dans les conditions étudiées dans la partie C. Elle est représentée ci-dessous.



D'après cette modélisation, quelle est la vitesse maximale du moteur ?
À quel moment, environ, est-elle atteinte ?

Partie D : Comportement d'un moteur soumis à différents sauts de tension

Une boucle de régulation de vitesse permet à présent de faire fonctionner le moteur à différentes vitesses. La tension d'entrée vaut successivement 10 V, 30 V puis 20 V. La vitesse de rotation du moteur est alors analysée et illustrée par le graphique ci-dessous.



1. Déterminer à l'aide du graphique les trois instants où les tensions ont été modifiées. On ne demande pas de justification.

2. Représenter sur le document réponse (page 9) la tension d'entrée e, exprimée en Volt, appliquée aux bornes du moteur en fonction du temps t, exprimé en seconde.

3. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction causale unité. On rappelle que :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ sinon.}$$

Pour exprimer la tension d'entrée $e(t)$ appliquée aux bornes du moteur à l'instant t un étudiant propose l'expression $e(t) = 10\mathcal{U}(t) + 30\mathcal{U}(t-3) - 20\mathcal{U}(t-7)$ et remplit le tableau donné sur le document réponse.

a. Compléter, sur le document réponse, le tableau rempli par l'étudiant.

b. Une fois qu'il a terminé de remplir le tableau, l'étudiant se rend compte qu'il a donné une expression inexacte de $e(t)$. Expliquer pourquoi.

c. Donner l'expression exacte de $e(t)$. On n'attend pas de justification.

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties suivantes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre

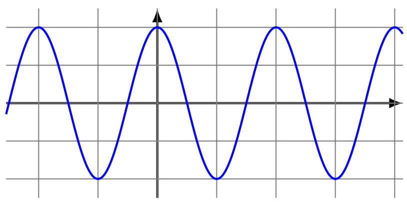
PARTIE A :

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π, vérifiant :

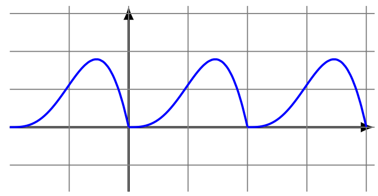
$$f(t) = t\sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction f ? On n'attend pas de justification.

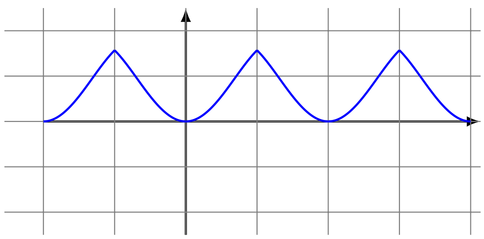
Courbe 1



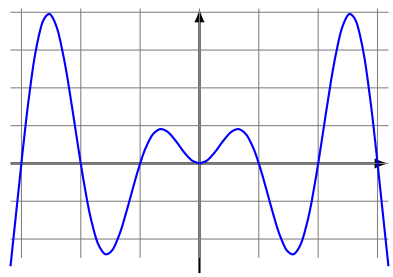
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
On note S son développement en série de Fourier.
On rappelle que :

> $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T période de f ;
> $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $n \geqslant 1$: $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
> avec a constante réelle quelconque.

a. Justifier que $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

b. Montrer que la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto t\sin t$.

c. La fonction étant paire et de période π, a_0 vérifie $a_0 = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Écrire les étapes du calcul effectué.

3. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$
Donner les valeurs de a_1 et a_2 arrondies au millième.

4. On note f_e le nombre positif vérifiant $f_e^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.

On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de f_e^2 au millième.

a. Calculer la valeur approchée de f_e^2 au millième.

b. Si f modélise un signal de période π, que représente f_e ?

PARTIE B : Étude de quelques propriétés d'un filtre numérique

- Le signal causal d'entrée d'un filtre numérique, noté $e(n)$, est l'échelon unité discret.
  On a donc : $e(n) = \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & n < 0 \\ 1 & \text{si} & n \geqslant 0 \end{array}$
- Le signal causal de sortie de ce filtre numérique est noté $x(n)$ et vérifie, pour tout entier relatif n : $x(n) - x(n-2) = 0,04e(n-1)$. $\quad (*)$

1. **a.** Justifier que $x(0) = 0$.

b. Calculer $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$ et $x(5)$. Détailler au moins un des calculs sur la copie.

Dans les questions 2 et 3, on note E(z) et $X(z)$ les transformées en Z respectives des signaux causaux $e(n)$ et $x(n)$.
On donne les formules suivantes :

Signal causal	**Transformée en** Z
$n \to 1$	$\dfrac{z}{z-1}$
$n \to d(n)$ où $d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ sinon.	1
$n \to n$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$n \to a^n$ avec a réel non nul.	$\dfrac{z}{(z-a)}$
Propriétés	
$n \to x(n)$	$X(z)$
$y : n \to a^n x(n)$ avec a réel non nul	$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
$y : n \to x\big(n - n_)$ pour $n \geqslant n_0$	$Y(z) = z^{-n_0}X(z)$
$y : n \to x(n+1)$	$Y(z) = z[X(z) - x(0)]$
$y : n \to x(n+2)$	$Y(z) = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}$

[resume]

1. **a.** Quelle est l'expression de E(z) ?

b. Exprimer en fonction de z la transformée en Z de $0,04e(n-1)$.

c. Exprimer en fonction de z et de $X(z)$ la transformée en Z de $x(n) - x(n-2)$.

d. Déduire de l'égalité (*) que : $X(z) = \dfrac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}$.

2. On admet que $X(z)$ peut s'écrire : $X(z) = \dfrac{0,02z}{(z-1)^2} + \dfrac{0,01z}{z-1} - \dfrac{0,01z}{z+1}$.

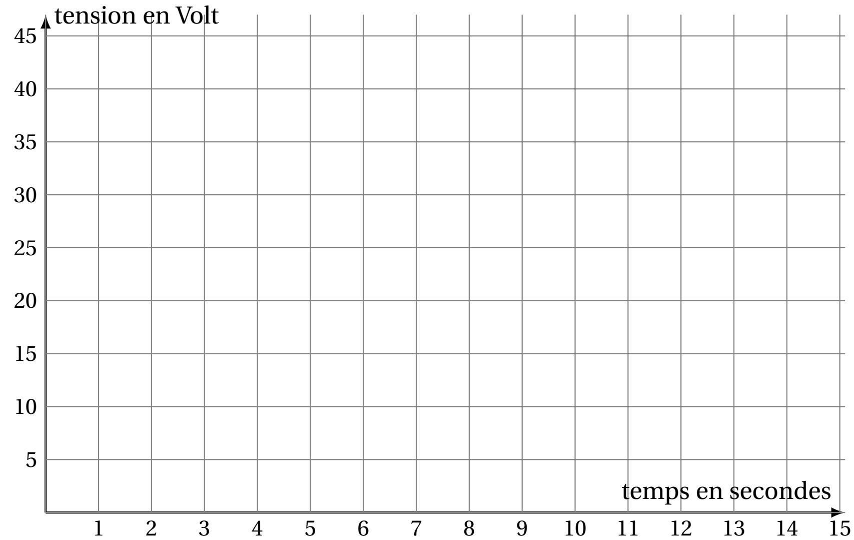
a. En déduire que pour tout entier naturel n : $x(n) = 0,02n + 0,01\left(1 - (-1)^n\right)$.

b. On rappelle que : $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.
Montrer que $x(2n+1) = x(2n+2)$ pour tout entier naturel n.

c. Représenter dans un repère à tracer sur la copie les termes du signal causal $x(n)$ pour n compris entre -2 et 6.

DOCUMENT RÉPONSE à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 2 :



EXERCICE 1 - PARTIE D - Question 3. a. :

t	$-\infty$	0	3	7 $\quad +\infty$
$10\mathscr{U}(t)$				
$30\mathscr{U}(t-3)$				
$-20\mathscr{U}(t-7)$				
$e(t)$				