10 - Transformation en Z

10 janvier 2020

I. Signal numérique

I. 1) Contexte technologique

Un signal est une grandeur physique, par exemple une tension, qui transporte une information.

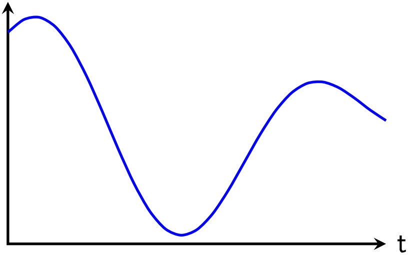
Depuis l'avènement des dispositifs numériques (microcontrôleurs, calculateur, **D**igital **S**ignal **P**rocessor...) on trouve avantageux de faire le traitement du signal de façon numérique.

Première conséquence : la numérisation

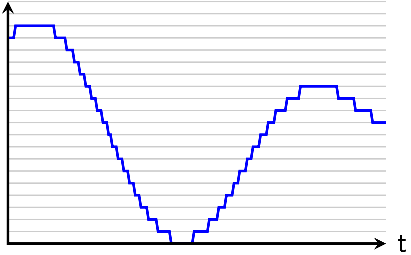
Une grandeur physique réelle peut, en théorie, prendre n'importe quelle valeur réelle. Elle peut donc varier continûment.

Une grandeur numérique est représentée par un nombre binaire. Un nombre 10 bits ne peut prendre que 2^{10} valeurs différentes. La grandeur numérique ne peut donc pas varier continûment.

Signal analogique



Signal numérique



TZ n'a rien à voir avec cela !

Deuxième conséquence : l'échantillonnage

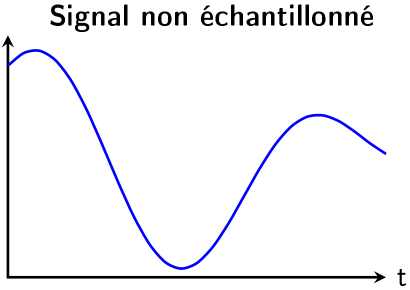
Les signaux réels (sortie d'un micro, d'un capteur...) sont analogiques. Il faut un petit temps pour faire la conversion analogique $\rightarrow$ numérique.

Concrètement : On relève la valeur de la grandeur analogique à un instant ; on fait la conversion, cela prend un temps, par exemple $10\mu s$; on relève à nouveau la valeur analogique.

Autrement dit, dans le temps de la conversion, on n'a pas du tout observé la grandeur analogique. C'est un **échantillonnage** : on relève la grandeur analogique **à intervalle régulier mais pas tout le temps**.

De plus, les systèmes numériques sont cadencés par une horloge. Ils fonctionnent donc avec un temps discontinu.

Deuxième conséquence : l'échantillonnage



C'est avec cela que TZ a à voir !

I. 2) Définition du signal échantillonné causal

Soit $\mathcal{X}(t)$ un signal causal.

T_e est une période d'**échantillonnage**.
On note :

$$x_n = x(n) = \mathcal{X}(n \cdot T_e)$$

Causal $\Rightarrow x(n) = 0$ si $n < 0$.

On peut voir $x(n) = x_n$ comme une suite.

T Laplace

On met un signal $e(t)$ en entrée d'un dispositif. On veut étudier la sortie $s(t)$.

On sait que le dispositif obéit à une équation différentielle comme :

$$0,3\, s'(t) + s(t) = e(t)$$

TZ

On met un signal numérique e_n en entrée d'un dispositif. On veut étudier la sortie numérique s_n.

On sait que le dispositif obéit à une équation de récurrence comme :

$$s_n - 0,3\, s_{n-1} = e_n$$

T Laplace	**TZ**
On met un signal $e(t)$ en entrée d'un dispositif. On veut étudier la sortie $s(t)$.	On met un signal numérique e_n en entrée d'un dispositif. On veut étudier la sortie numérique s_n.
On sait que le dispositif obéit à une équation différentielle comme :	On sait que le dispositif obéit à une équation de récurrence comme :
$0,3\,s'(t) + s(t) = e(t)$	$s_n - 0,3\,s_{n-1} = e_n$

On peut faire un lien entre les deux : on peut approximer le s' du cas continu par $\frac{s_n - s_{n-1}}{T_e}$, ainsi l'équation différentielle est approximée par une équation de récurrence.

II. Transformation en Z

Comme pour la **transformation de Laplace**, on voir la **transformation en Z** comme une astuce de calcul.

Inutile donc de trop chercher à quoi correspond z ni pourquoi on prend cette formule plutôt qu'une autre.

Comme pour p, z est un **nombre complexe**.

II. 1) Définition

Soit s_n un signal numérique causal.
On appelle transformée en Z de s_n la fonction :

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} s_n \cdot z^{-n}$$

II. 1) Définition

Soit s_n un signal numérique causal.
On appelle transformée en Z de s_n la fonction :

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} s_n \cdot z^{-n}$$

- n représente le temps discrétisé. s_n est dans le **domaine temporel**.
- z comme p est difficile à interpréter. En général, on dit que $S(z)$ est dans le **domaine fréquentiel**.

II. 2) Existence

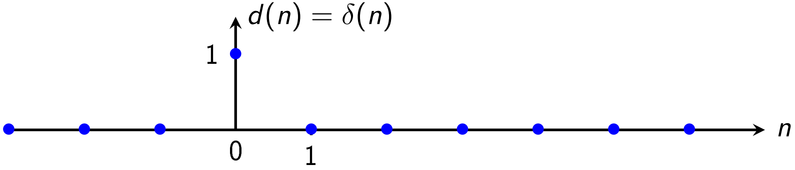
La somme $S(z) = \sum_{n \geqslant 0} s_n \cdot z^{-n}$ est **infinie**. On peut donc se demander si elle est bien définie.

En général, $S(z)$ ne sera bien définie que pour certaine valeur de z. Il faut que $|z| > R$ ou R est un seuil à déterminer.

On ne se préoccupera pas de ce problème.

III. Fonctions de référence

III. 1) Dirac



La fonction **Dirac**, notée souvent d ou δ, est définie par :

$$d(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 1

Déterminer la TZ d'un dirac.

Exercice 1

Déterminer la TZ d'un dirac.

Correction :

$$D(z) = \sum_{n \geqslant 0} d(n) \cdot z^{-n} = 1\,z^0 + 0\,z^{-1} + 0\,z^{-2} + \cdots = 1$$

Exercice 1

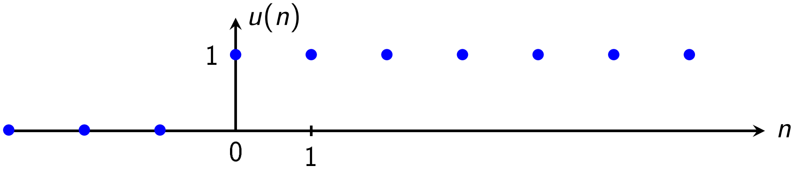
Déterminer la TZ d'un dirac.

Correction :

$$D(z) = \sum_{n \geqslant 0} d(n) \cdot z^{-n} = 1\,z^{0} + 0\,z^{-1} + 0\,z^{-2} + \cdots = 1$$

$$D(z) = 1$$

III. 2) Échelon



La fonction **Échelon**, notée souvent u, est définie par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer la TZ d'un échelon.

Exercice 2

Déterminer la TZ d'un échelon.

Correction :

$$U(z) = \sum_{n \geqslant 0} u(n) \cdot z^{-n} = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

On reconnaît une suite géométrique de raison z^{-1}.

$$U(z) = \frac{1 - z^{-1 \times N}}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec } N \to +\infty$$

Si on choisit $|z| > 1$, $z^{-N} \to 0$.

Exercice 2

Déterminer la TZ d'un échelon.

Correction :

$$U(z) = \sum_{n \geqslant 0} u(n) \cdot z^{-n} = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

On reconnaît une suite géométrique de raison z^{-1}.

$$U(z) = \frac{1 - z^{-1 \times N}}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec } N \to +\infty$$

Si on choisit $|z| > 1$, $z^{-N} \to 0$.

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Exercice 3

Dans les formulations des TZ, on doit souvent changer de forme comme avec $\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$.

Dans les cas suivants, réécrivez les expressions pour faire disparaître tous les z^{-k}.

(1) $X(z) = \dfrac{2\,z^{-1}}{z^{-2} + 3z^{-1} + 5}$

(2) $X(z) = z^{-3}\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$

(3) $X(z) = \dfrac{1}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - 4z^{-1})}$

Cas discret d'une exponentielle, une suite géométrique : $x_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{C}$.

$$x(n) = a^n \cdot u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Méthode identique à celle employée pour l'échelon.

Comme TL, la TZ est **linéaire**. C'est habituel, on utilise cette propriété sans y penser.

On aura deux autre propriétés utiles :

(P1) Décalage temporel

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$ et $y(n) = x(n-k)$ avec k un entier positif fixé.

$$Y(z) = z^{-k} X(z)$$

III. 4) Propriétés

Comme TL, la TZ est **linéaire**. C'est habituel, on utilise cette propriété sans y penser.

On aura deux autre propriétés utiles :

(P1) Décalage temporel

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$ et $y(n) = x(n-k)$ avec k un entier positif fixé.

$$Y(z) = z^{-k} X(z)$$

Exemple : On définit $y_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

III. 4) Propriétés

Comme TL, la TZ est **linéaire**. C'est habituel, on utilise cette propriété sans y penser.

On aura deux autre propriétés utiles :

(P1) Décalage temporel

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$ et $y(n) = x(n-k)$ avec k un entier positif fixé.

$$Y(z) = z^{-k} X(z)$$

Exemple : On définit $y_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On reconnaît $y_n = u_{n-3}$ et donc $Y(z) = z^{-3} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}$

Exercice 4

En utilisant la formule $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k}\,X(z)$, reformulez ces équations de récurrence sous forme d'une équation en $X(z)$.

(1) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

(2) $\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2} = u_n$

(3) $0,2\,\dfrac{x_n - x_{n-1}}{T_e} + x_n = u_n$

(P1) Décalage temporel (dans l'autre sens)

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$ et $y(n) = x(n+1)$ avec k un entier positif fixé.

$$Y(z) = z\,(X(z) - x(0))$$

La formule est un peu plus compliquée. C'est parce que si $x_0 \neq 0$ alors $y_{-1} \neq 0$ ce qui est ennuyeux (*causalité*). Le fait d'imposer $y_{-1} = 0$ nous oblige à faire $-x(0)$ dans la formule.

Exercice 5

En utilisant la formule $x(n+1) \xrightarrow{TZ} z\,(X(z) - x(0))$, reformulez ces équations de récurrence sous forme d'une équation en $X(z)$.

(1) $x_{n+1} = 0,5\,x_n$ avec $x(0) = 100$

(2) $x_{n+1} = 0,5\,x_n + 10\,u(n)$ avec $x(0) = 1$

(P2) Multiplication par a^n

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$, et $y(n) = a^n \cdot x(n)$.

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

(P2) Multiplication par a^n

Soit $x(n)$ de TZ $X(z)$, et $y(n) = a^n \cdot x(n)$.

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Exemple : On a déjà vu que $u(n) \xrightarrow{TZ} U(z) = \frac{z}{z-1}$.

On a donc :

$$x(n) = a^n \cdot u(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = U\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z/a}{z/a - 1} = \frac{z}{z-a}$$

IV. Exemple d'utilisation

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

On passe dans le domaine fréquentiel avec TZ :

$$x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$$

$$x(n+1) \xrightarrow{TZ} z(X(z) - x(0)) = z(X(z) - 50)$$

$$e(n) \xrightarrow{TZ} 100\frac{z}{z-1}$$

Donc :$z(X(z) - 50) - 1,02\,X(z) = 100\dfrac{z}{z-1}$

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

On passe dans le domaine fréquentiel avec TZ :

$$x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$$

$$x(n+1) \xrightarrow{TZ} z(X(z) - x(0)) = z(X(z) - 50)$$

$$e(n) \xrightarrow{TZ} 100\frac{z}{z-1}$$

Donc :$z(X(z) - 50) - 1,02\,X(z) = 100\dfrac{z}{z-1}$

$$X(z) = 50\frac{z}{z-1,02} + 100\frac{z}{(z-1)(z-1,02)}$$

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

$$X(z) = 50\frac{z}{z-1,02} + 100\frac{z}{(z-1)(z-1,02)}$$

On décompose en élément simples :

$$X(z) = \frac{a\,z}{z-1,02} + \frac{b\,z}{z-1}$$

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

$$X(z) = 50\frac{z}{z-1,02} + 100\frac{z}{(z-1)(z-1,02)}$$

On décompose en élément simples :

$$X(z) = \frac{a\,z}{z-1,02} + \frac{b\,z}{z-1}$$

$$X(z) = 5050\frac{z}{z-1,02} - 5000\frac{z}{z-1}$$

On se donne l'équation

$$x(n+1) - 1,02x(n) = e(n), \quad e(n) = 100\,u(n) \text{ et } x(0) = 50$$

$$X(z) = 50\frac{z}{z-1,02} + 100\frac{z}{(z-1)(z-1,02)}$$

$$X(z) = 5050\frac{z}{z-1,02} - 5000\frac{z}{z-1}$$

On repasse dans le domaine temporel en reconnaissant $\frac{z}{z-1,02} \xrightarrow{TZ^{-1}} 1,02^n u(n)$ et $\frac{z}{z-1} \xrightarrow{TZ^{-1}} u(n)$, donc :

$$x(n) = 5050 \cdot 1,02^n u(n) - 5000u(n)$$

Il est ensuite aisé de calculer les termes $x(n)$.