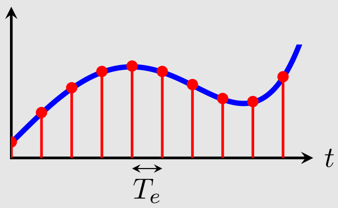
Transformation en Z



DÉFINITION Signal numérique causal

Soit $\mathcal{X}(t)$ un signal causal. T_e est une période d'**échantillonnage**. On note :

$$x_n = x(n) = \mathcal{X}(n \cdot T_e)$$

Causal $\Rightarrow x(n) = 0$ si $n < 0$.

DÉFINITION transformation en Z.

$$X(z) = \sum_{n \geqslant 0} x(n) \cdot z^{-n}$$

Remarques :

- n correspond au **temps**.
- Ne pas trop chercher à quoi z correspond... On peut le rapprocher du p de Laplace, donc d'une **fréquence**.
- $X(z)$ est définie seulement pour certains z. En général il faut $|z| > m$, m étant un nombre à déterminer.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Dirac	Échelon	Exponentielle
$d(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$x(n) = a^n u(n), \quad a \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$
$D(z) = 1$	$U(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$	$X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$

PROPRIÉTÉS

$x : n \mapsto x(n)$ causal	$X(z)$
$y : n \mapsto a^n\, x(n), \quad a \neq 0$	$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
$y : n \mapsto x(n-k)$	$Y(z) = z^{-k}\, X(z)$
$y : n \mapsto x(n+1)$	$Y(z) = z[X(z) - x(0)]$
$y : n \mapsto n \cdot x(n)$	$Y(z) = -z \cdot X'(z)$

VALEUR INITIALE $$\lim_{|z| \to +\infty} X(z) = x(0)$$

VALEUR FINALE $$\lim_{|z| \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z) = \lim_{n \to +\infty} x(n)$$

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES Ce que l'**équation différentielle** est à la **transf. de Laplace**.

Exemple : $x(n+1) = 1,02x(n) + 100, \quad x(0) = 50$

On passe en TZ : $z[X(z) - x(0)] = 1,02X(z) + 100\dfrac{z}{z-1}$

On en déduit : $X(z) = 50\dfrac{z}{z-1,02} + 100\dfrac{z}{(z-1)(z-1,02)}$ Il faut décomposer en **éléments simples**, ce qui donne : $X(z) = 5\ 050\dfrac{z}{z-1,02} - 5\ 000\dfrac{z}{z-1}$

On reconnaît ces TZ, on déduit : $x(n) = 5\ 050 \cdot 1,02^n - 5\ 000, \quad n \in \mathbb{N}$