I. BTS 2017

- Le signal causal d'entrée d'un filtre numérique, noté $e(n)$, est l'échelon unité discret.
  On a donc : $e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$
- Le signal causal de sortie de ce filtre numérique est noté $x(n)$ et vérifie, pour tout entier relatif n : $x(n) - x(n-2) = 0,04e(n-1) \quad (\spadesuit)$

(1) (a) Justifier que $x(0) = 0$.

(b) Calculer $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$ et $x(5)$. Détailler au moins un des calculs sur la copie.

Dans les questions 2 et 3, on note $E(z)$ et $X(z)$ les transformées en Z respectives des signaux causaux $e(n)$ et $x(n)$.

(2) (a) Quelle est l'expression de $E(z)$?

(b) Exprimer en fonction de z la transformée en Z de $0,04e(n-1)$.

(c) Exprimer en fonction de z et de $X(z)$ la transformée en Z de $x(n) - x(n-2)$.

(d) Déduire de l'égalité ($\spadesuit$) que : $X(z) = \dfrac{0,04\,z^2}{(z-1)^2(z+1)}$.

(3) On admet que $X(z)$ peut s'écrire : $X(z) = \dfrac{0,02\,z}{(z-1)^2} + \dfrac{0,01\,z}{z-1} - \dfrac{0,01\,z}{z+1}$.

(a) En déduire que pour tout entier naturel n : $x(n) = 0,02n + 0,01\,(1 - (-1)^n)$.

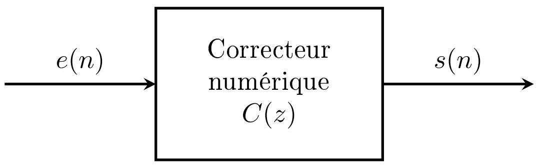
(b) On rappelle que : $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.
Montrer que $x(2n+1) = x(2n+2)$ pour tout entier naturel n.

(c) Représenter dans un repère à tracer sur la copie les termes du signal causal $x(n)$ pour n compris entre -2 et 6.

II. BTS 2016

Dans un véhicule comportant un dispositif de régulation de la vitesse, le volet d'admission d'air du moteur thermique est contrôlé par le calculateur du véhicule. Les différentes informations issues des capteurs de position du volet d'admission d'air sont échantillonnées et numérisées par un convertisseur analogique-numérique (CAN) avant d'être traitées par un correcteur numérique.
Dans cet exercice on étudie la stabilité et la rapidité du correcteur numérique.
On note

- $e(n)$ et $s(n)$: les signaux causaux d'entrée et de sortie du correcteur numérique.
- $\mathrm{E}(z)$ et $\mathrm{S}(z)$: les transformées en Z de $e(n)$ et $s(n)$.
- $\mathrm{C}(z)$: la fonction de transfert du correcteur. On admet que $\mathrm{C}(z) = \dfrac{\mathrm{S}(z)}{\mathrm{E}(z)} = \dfrac{1,2\,z - 1,1}{z - 0,5}$.
- $\mathrm{T_E}$: la période d'échantillonnage. $\mathrm{T_E}$ est égale à 10 microsecondes (μs), soit à 10^{-5} s.



(1) Calculer, en hertz, la fréquence d'échantillonnage.

(2) Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est l'impulsion unité. Il est donc défini par :

$$e(0) = 1 \quad \text{et} \quad e(n) = 0 \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

(a) Vérifier que : $S(z) = 2,2 - \dfrac{z}{z - 0,5}$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $s(n)$.
Préciser la valeur de $s(0)$ et celle de $s(n)$ pour n non nul.

(c) Le système est dit stable si $\lim\limits_{n \to +\infty} s(n) = 0$. Ce système est-il stable ? Justifier.

(3) Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est quelconque.

(a) Montrer que : $\left(1-0,5\,z^{-1}\right)S(z)=\left(1,2-1,1\,z^{-1}\right)\mathrm{E}(z)$.

(b) En déduire que la relation de récurrence du correcteur est :

$$s(n)=1,2\,e(n)-1,1\,e(n-1)+0,5\,s(n-1).$$

(4) Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est le signal échelon unité :

$$e(n)=0 \text{ si } n<0 \quad \text{et } e(n)=1 \text{ sinon.}$$

On prendra $s(0)=0$.

(a) Exprimer $s(n)$ en fonction de $s(n-1)$ pour $n \geqslant 1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$s(n)$	0										

(b) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 du tableur pour obtenir, en la recopiant vers la droite, les valeurs successives de $s(n)$?

(c) Compléter le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs demandées.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(n)$	0		0,15		0,188	0,194			0,199	0,200	0,200

(d) À l'aide de ce tableau, conjecturer le sens de variation de $s(n)$ et la valeur de sa limite L quand n tend vers $+\infty$.

(e) Le correcteur est dit rapide si le temps nécessaire pour atteindre 99 % de la valeur limite de $s(n)$ est inférieur à 100 ms. Le correcteur est-il rapide ? Expliquer.

III. BTS 2014

On note $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie, sur l'ensemble des nombres réels, par

$$\begin{cases}\mathcal{U}(t)=0 & \text{si } t<0\\ \mathcal{U}(t)=1 & \text{si } t\geq 0\end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

On considère un système entée-sortie analogique du premier ordre dont la fonction de transfert H est définie par

$$H(p)=\frac{2}{1+0,5p}$$

1. On considère la fonction causale s dont la transformée de Laplace est

$$S(p)=\frac{2}{p(1+0,5p)}$$

La fonction s modélise la réponse du système analogique à l'échelon unité $\mathcal{U}$.

(a) Vérifier que

$$S(p)=\frac{2}{p}-\frac{2}{p+2}$$

(b) En déduire $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

(c) Compléter la ligne donnant les valeurs de $s(t)$ dans le tableau 2 en donnant les valeurs approchées à 10^{-3} près.

2. On considère maintenant un système entrée-sortie numérique dont la fonction de transfert F est définie par

$$F(z)=H\left(100\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Ce système numérique permet d'approcher le système analogique.

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisés, respectivement, par deux suites causales x et y. Ces deux suites admettent des transformées en $\mathcal{Z}$ notées, respectivement, $X(z)$ et $Y(z)$ telles que

$$Y(z)=F(z)X(z)$$

(a) Montrer que

$$F(z)=\frac{2\left(1+z^{-1}\right)}{51-49z^{-1}}$$

(b) En déduire que

$$51\,Y(z)-49\,z^{-1}\,Y(z)\;=\;2\,X(z)+2\,z^{-1}\,X(z)$$

(c) En déduire que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 0, on a :

$$y(n)=\frac{49}{51}\,y(n-1)+\frac{2}{51}\,x(n)+\frac{2}{51}\,x(n-1)$$

3. On suppose dans cette question que, pour tout nombre entier n, on a $x(n)=d(n)$, où d est la suite impulsion unité définie par

$$\begin{cases}d(0)=1\\ d(n)=0 \quad \text{si } n\neq 0\end{cases}$$

Grâce à la formule obtenue dans la question 2c, compléter le tableau 1. On pourra utiliser des valeurs approchées à 10^{-3} près.

4. Dans cette question, on suppose que, pour tout entier n, on a $x(n)=e(n)$ où e est la suite échelon unité définie par

$$\begin{cases}e(n)=0 \quad \text{si } n<0\\ e(n)=1 \quad \text{si } n\geq 0\end{cases}$$

On admet que

$$Y(z)=\frac{2\,z(z+1)}{(51z-49)(z-1)}$$

(a) Vérifier que

$$Y(z)=\frac{2\,z}{z-1}-\frac{100}{51}\times\frac{z}{z-\frac{49}{51}}$$

(b) En déduire $y(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

(c) Compléter la ligne donnant les valeurs de $y(n)$ dans le tableau 2 avec des valeurs approchées à 10^{-3} près.

n	-1	0	1	2	3
$d(n)$	0	1	0	0	0
$y(n)$	0				

Tableau 1 (ici $x(n)=d(n)$)

n	0	10	20	30	40	50	100	150
$y(n)$	0,039		1,119	1,410		1,735		
$t=0,02n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$s(t)$	0	0,659			1,596		1,963	

Tableau 2 (ici $x(n)=e(n)$)

IV. BTS 2012

Il s'agit de la partie B de l'exercice original.

On s'intéresse maintenant à un système d'entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans la partie A. Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation (E') suivante :

$$2\,\frac{x(n+1)-x(n)}{T_e}+x(n+1)=3$$

Pour tout nombre entier n, le nombre réel $x(n)$ fournit une approximation de $x(nT_e)$.

En particulier, on a :

$$x(0)=s(0)=0$$

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $T_e=0,1$ seconde.

1. Montrer que la relation (E') peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul, sous la forme :

$$x(n+1) = \frac{20}{21}\, x(n) + \frac{1}{7}$$

2. On a rempli le tableau de valeurs ci-dessous.

n	0	1	2	3
$x(n)$	0	$0,143$	$0,279$	$0,408$

Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(4)$ et $x(5)$.

3. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite $x(n)$.
Déduire de la question 1 que :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{7\,(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}$$

4. Déterminer les réels A et B tels que :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{z-\frac{20}{21}}$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$x(n) = 3\left[1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n\right]$$

6. (a) Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geq 0,95$.
   (c) En déduire, à 10^{-1} près, le temps de réponse en secondes du système numérique.
   Le temps de réponse est la valeur de t pour laquelle $s(t)$ atteint 95 % de $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$

V. BTS 2011

Il s'agit de la partie B de l'exercice original.

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal discret causal x et la tension de sortie s par un signal discret causal y.

Un pas de discrétisation T_e étant choisi, les signaux x et y vérifient, pour tout nombre entier n, l'équation :

$$0,005\,\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e} + y(n) = x(n) \qquad (1)$$

1. Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $T_e = 0,5\cdot 10^{-3}\ \ s$.
Montrer que l'équation (1) s'écrit alors :

$$11y(n) - 10y(n-1) = x(n)$$

2. On suppose désormais que $x(n) = 2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini par $e(n) = 1$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la transformée en Z du signal discret y, notée $Y(z)$, vérifie :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{11} \times \frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)}.$$

   (b) Vérifier que :

$$Y(z) = \frac{2}{11}\left(\frac{11z}{z-1} - \frac{10z}{z-\frac{10}{11}}\right).$$

   (c) En déduire l'expression de $Y(z)$ sous forme d'une somme.
3. (a) Exprimer $y(n)$ en fonction de n, pour tout nombre entier naturel n.
   (b) Calculer la limite de $y(n)$ quand n tend vers $+\infty$.