On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions **causales** notées respectivement e et s.

On suppose dans tout l'exercice que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.
Les fonctions e et s sont liées sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par l'équation différentielle :

$$(E): \quad s''(t) + 1,6s'(t) + 4,6\,s(t) = 4,6\,e(t), \quad \text{avec} \quad e(t) = 3\mathcal{U}(t)$$

On note E et S les transformées de Laplace respectives des fonctions e et s.

(1) Donner l'expression de $E(p)$

(2) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E), montrer que

$$S(p) = \frac{13,8}{p\ (p^2 + 1,6\,p + 4,6)}$$

(3) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel p, on ait

$$S(p) = \frac{a}{p} + b \cdot \frac{p + 0,8}{p^2 + 1,6\,p + 4,6} + c \cdot \frac{1}{p^2 + 1,6\,p + 4,6}$$

(4) Montrez que $p^2 + 1,6p + 4,6 = (p + 0,8)^2 + \omega^2$ où vous déterminerez la valeur de ω. Donnez une valeur approchée au dixième de ω.

(5) En utilisant l'approximation précédente, déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

(6) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$. On appellera cette limite « valeur finale de s »et on la note s_∞.
Donner une interprétation graphique de cette limite.

(7) Sur la courbe de s, comment se traduit le fait que $s(0) = 0$? que $s'(0) = 0$?

(8) Tracer la courbe représentative de $s(t)$ dans le graphique donné ci-dessous.

(9) Soit t_f le temps à partir duquel l'écart entre $s(t)$ et s_∞ passe définitivement en dessous de 5 % de la valeur finale.
Déterminer t_f par la méthode de votre choix.