Transformation de Laplace

Ne recopiez pas ce qui est écrit en vert !

I. Transformation de Laplace

I. 0) Présentation

Pierre-Simon de Laplace
1749-1827
Mathématique, probabilités, mécanique, astronomie

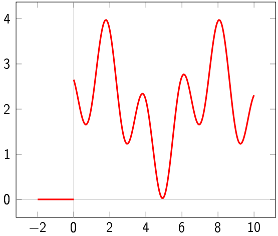
C'est un développement d'un outil créé en 1774 par Laplace dans le cadre des probabilités.

La **TL** présente la fonction sous une autre forme, équivalente, mais qui permet de faire certains calculs plus facilement.

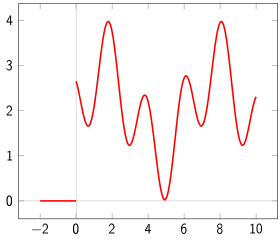
L'effet d'une dérivée notamment est plus simple, ce qui facilite le traitement des **équations différentielles**.

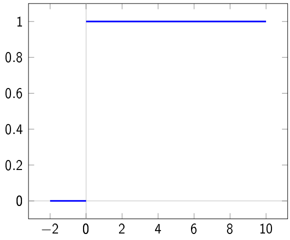
L'utilisation de la **TL** peut être vue comme une astuce de calcul.

1. **Fonction causale :** C'est une fonction nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.

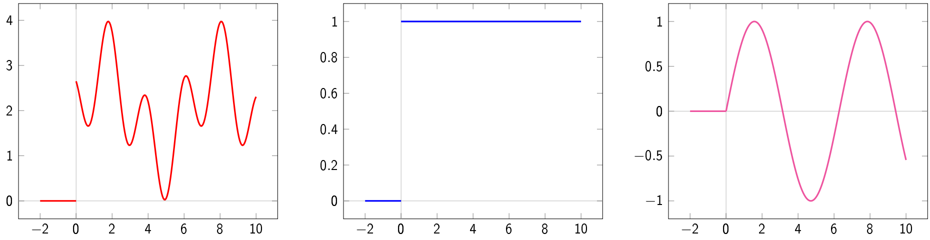


1. **Fonction causale :** C'est une fonction nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.
2. **Échelon :** $U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$





1. **Fonction causale :** C'est une fonction nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.
2. **Échelon :** $U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$
3. l'échelon permet de **forcer la causalité**.
   $f(t) = U \cdot \sin(t)$ est causale.



I. 2) Calcul de $F(p)$

f une fonction causale. La fonction $F = TL(f)$, transformée de Laplace de la fonction f, est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{C}$$

On ne peut pas toujours faire le calcul : pas pour tout les f, pas pour tous les $p \in \mathbb{C}$. Il suffit de le savoir, on ne vous demande pas de vous en préoccuper.

p est une sorte de ω complexe généralisé. Mais on utilise la TL sans vraiment se soucier de ce que représente p.

1. **Échelon :**

$$U(p) = \int_0^{+\infty} 1 \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-p\,t}}{p} \right]_0^{+\infty}$$

1. **Échelon :**

$$U(p) = \int_0^{+\infty} 1\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-p\,t}}{p}\right]_0^{+\infty}$$

Si $Re(p) > 0$ alors $\mathrm{e}^{-p\,t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ et alors :

$$U(t) \xrightarrow{TL} U(p) = \frac{1}{p}$$

La condition $Re(p) > 0$ n'est pas à connaître et n'aura pas de conséquences dans les exercices qui seront proposés.

1. **Échelon :**

$$U(p) = \int_0^{+\infty} 1 \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-p\,t}}{p} \right]_0^{+\infty}$$

Si $Re(p) > 0$ alors $\mathrm{e}^{-p\,t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ et alors :

$$U(t) \xrightarrow{TL} U(p) = \frac{1}{p}$$

La condition $Re(p) > 0$ n'est pas à connaître et n'aura pas de conséquences dans les exercices qui seront proposés.

On comprend tout de suite que $U(p)$ est une transformée de Laplace car la variable est p.

2. **Exponentielle :** $f(t) = \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot U(t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-a\,t} \cdot \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-(p+a)\,t}}{p+a} \right]_0^{+\infty}$$

I. 3) Fonctions usuelles

2. **Exponentielle :** $f(t) = \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot U(t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-(p+a)\,t}}{p+a} \right]_0^{+\infty}$$

La encore il faut $Re(p+a) > 0$ pour conclure :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \frac{1}{p+a}$$

I. 3) Fonctions usuelles

3. **Cosinus :** $f(t) = \cos(\omega\, t) \cdot U(t)$

3. **Cosinus :** $f(t) = \cos(\omega\, t) \cdot U(t)$

$$\cos(\omega\, t) = \frac{e^{i\omega\, t} + e^{-i\omega\, t}}{2} \text{ et } \begin{cases} e^{i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p - i\omega} \\ e^{-i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p + i\omega} \end{cases}$$

3. **Cosinus :** $f(t) = \cos(\omega\, t) \cdot U(t)$

$$\cos(\omega\, t) = \frac{e^{i\omega\, t} + e^{-i\omega\, t}}{2} \text{ et } \begin{cases} e^{i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p-i\omega} \\ e^{-i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+i\omega} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + i\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

On a utilisé la **linéarité** de TL qui vient de la **linéarité** de l'intégrale. En effet on peut écrire, pour f et g deux fonctions causales, α et β deux constantes réelles ou complexes :

$$TL(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\; TL(f) + \beta\; TL(g)$$

3. **Cosinus :** $f(t) = \cos(\omega\, t) \cdot U(t)$

$$\cos(\omega\, t) = \frac{e^{i\omega\, t} + e^{-i\omega\, t}}{2} \text{ et } \begin{cases} e^{i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p - i\omega} \\ e^{-i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p + i\omega} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + i\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \cos(\omega\, t) \cdot U(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

4. **Sinus :** $f(t) = \sin(\omega\, t) \cdot U(t)$

4. **Sinus :** $f(t) = \sin(\omega\, t) \cdot U(t)$

$$\sin(\omega\, t) = \frac{e^{i\omega\, t} - e^{-i\omega\, t}}{2i} \text{ et } \begin{cases} e^{i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p-i\omega} \\ e^{-i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+i\omega} \end{cases}$$

4. **Sinus :** $f(t) = \sin(\omega\, t) \cdot U(t)$

$$\sin(\omega\, t) = \frac{e^{i\omega\, t} - e^{-i\omega\, t}}{2i} \text{ et } \begin{cases} e^{i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p - i\omega} \\ e^{-i\omega\, t} \cdot U(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p + i\omega} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{2i}\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \sin(\omega\, t) \cdot U(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

I. 3) Fonctions usuelles

5. **Puissance :** $f(t) = t^n \cdot U(t), n \in \mathbb{N}$

Celle-ci est difficile et serait rappelée dans un formulaire. Il est d'ailleurs fréquent que l'on fournisse toutes les formules précédentes dans un formulaire.

I. 3) Fonctions usuelles

5. **Puissance :** $f(t) = t^n \cdot U(t), n \in \mathbb{N}$
   Soit $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
F_n(p) &= \int_0^{+\infty} \left(t^n \mathrm{e}^{-p\,t} - \frac{n\,t^{n-1}}{p} \mathrm{e}^{-p\,t} \right) \mathrm{d}t + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{t^n \mathrm{e}^{-p\,t}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p} F_{n-1}(p) \\
&= 0 + \frac{n}{p} F_{n-1}(p) \\
&= \frac{n!}{p^{n+1}}, \text{ où } n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n
\end{aligned}$$

5. **Puissance :** $f(t) = t^n \cdot U(t), n \in \mathbb{N}$
   Soit $F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$.

$$f(t) = t^n \cdot U(t), n \in \mathbb{N} \xrightarrow{TL} F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ où } n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

I. 3) Fonctions usuelles

Exemple d'utilisation :
$f(t) = \left(3t^2 + 5t + 2\right) \cdot U(t)$.
Déterminer $F(p)$.

Exemple d'utilisation :
$f(t) = \left(3t^2 + 5t + 2\right) \cdot U(t)$.
Déterminer $F(p)$.

$$F(p) = 3 \cdot \frac{2!}{p^3} + 5 \cdot \frac{1!}{p^2} + 2 \cdot \frac{1}{p} = \frac{6 + 5p + 2p^2}{p^3}$$

Exercice 1

Donnez les TL des fonctions suivantes :

(1) $f(t) = \sin(5t) \cdot U(t)$

(2) $f(t) = \cos(2t) \cdot U(t)$

(3) $f(t) = (\sin(3t) - \cos(3t)) \cdot U(t)$

(4) $f(t) = \left(t^3 + 2t^2 - 4t + 5\right) \cdot U(t)$

(5) $f(t) = \left(t^2 + t - e^{-3t}\right)\ U(t)$

(6) $f(t) = (\cos(2t) - \sin(t))\, U(t)$

(P1) **Dérivation**

C'est la plus importante, c'est elle permet l'utilisation de la TL avec les équations différentielles.

Prenons f causale, sa TL est F. On s'intéresse à f'.
Comment obtenir sa TL ?

(P1) **Dérivation**

Prenons f causale, sa TL est F. On s'intéresse à f'.
Comment obtenir sa TL ?

$$
\begin{aligned}
F_{der}(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(f'(t)\mathrm{e}^{-p\,t} - p\cdot f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} p\cdot f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \\
F_{der}(p) &= -f\left(0^+\right) + p\cdot F(p)
\end{aligned}
$$

(P1) **Dérivation**

Prenons f causale, sa TL est F. On s'intéresse à f'.
Comment obtenir sa TL ?

$$f'(t) \xrightarrow{TL} F_{der}(p) = p \cdot F(p) - f\left(0^+\right)$$

Pourquoi 0^+ ? Il y a souvent une discontinuité à $t = 0$. L'idée est qu'il faut prendre la valeur à droite de l'éventuelle discontinuité, car on intègre de 0 à l'infini, donc à droite de 0.

Exercice 2

(1) Soit $f(t) = \cos(3t) \cdot U(t)$.
   (a) Déterminez $F(p)$.
   (b) Calculez $f'(t)$ puis $F_{der} = TL(f')$.
   (c) Utilisez la formule $F_{der} = p \cdot F(p) - f(0^+)$ et vérifiez que vous retrouvez la même chose.

(2) Même question avec $f(t) = \left(3t^2 + 5t - 1\right) \cdot U(t)$.

(3) Si $f' = f$, avec $f(0) = 1$, déterminez $F(p)$.

(4) Soit $2\,f'(t) = f(t) + \sin(5t)$ avec $f(0) = 0$. Déterminez $F(p)$.

C'est déjà une équation différentielle !

(5) On sait que $F(p) = \frac{p+2}{p^2+5}$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Déterminez $TL(f'')$.

(P2) **Retard**

Soit f une fonction causale et F sa TL.

On considère la fonction retardée : f_τ définie par $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. On cherche $F_\tau = TL(f_\tau)$.

(P2) **Retard**

Soit f une fonction causale et F sa TL.

On considère la fonction retardée : f_τ définie par $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. On cherche $F_\tau = TL\,(f_\tau)$.

$$\begin{aligned} F_\tau(p) &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-p\,(u+\tau)}\mathrm{d}u, \text{ avec } u = t-\tau \\ &= \mathrm{e}^{-p\,\tau}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(P2) **Retard**

Soit f une fonction causale et F sa TL.

On considère la fonction retardée : f_τ définie par $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. On cherche $F_\tau = TL(f_\tau)$.

$$\begin{aligned} F_\tau(p) &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-p\,(u+\tau)}\mathrm{d}u, \text{ avec } u = t-\tau \\ &= \mathrm{e}^{-p\,\tau}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$F_\tau(p) = \mathrm{e}^{-p\,\tau}F(p)$$

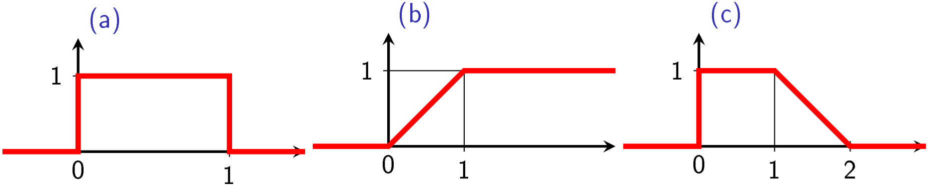
Exercice 3

(1) Donnez la TL de $t \mapsto U(t-1)$.

(2) Représentez graphiquement
$f : t \mapsto U(t) - U(t-1)$

(3) Donnez la TL de f.

(4) En raisonnant de même, donnez la TL des fonctions dont on a donné les représentations ci-dessous.



Exercice 4

Donnez les TL des fonctions suivantes.
Vous devrez utiliser la propriété de l'exercice précédent.

(1) $f(t) = \cos(t-1)U(t-1)$

(2) $f(t) = t \cdot U(t-4)$

(3) $f(t) = \left(t^2 + 4t - 3\right) U(t-2)$
Pour celui-ci, montrez que
$f(t) = \left((t-2)^2 + 8(t-2) + 9\right) U(t-2).$

(P3) **Multiplication par une exponentielle**
Soit f, une fonction causale dont la TL est F.
On considère $f_a : t \mapsto \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot f(t)$, $a \in \mathbb{C}$.
On cherche $F_a = TL\,(f_a)$.

(P3) **Multiplication par une exponentielle**
Soit f, une fonction causale dont la TL est F.
On considère $f_a : t \mapsto \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot f(t)$, $a \in \mathbb{C}$.
On cherche $F_a = TL\,(f_a)$.

$$\begin{aligned} F_a &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\,t} f(t) \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-(p+a)\,t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

(P3) **Multiplication par une exponentielle**

Soit f, une fonction causale dont la TL est F.
On considère $f_a : t \mapsto \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot f(t)$, $a \in \mathbb{C}$.
On cherche $F_a = TL\,(f_a)$.

$$\begin{aligned} F_a &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\,t} f(t) \mathrm{e}^{-p\,t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-(p+a)\,t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$F_a(p) = F(p+a), \quad a \in \mathbb{C}$$

Exercice 5

Soit $G(p) = \dfrac{p+2}{p^2+4p+29}$.

(1) Montrez que $G(p) = \dfrac{(p+2)}{(p+2)^2+25}$

Autrement dit, si $F(p) = \dfrac{p}{p^2+25}$, alors $G(p) = F(p+2)$.

(2) De quelle fonction f, F peut-elle être la TL ?

(3) Déduisez-en une fonction dont G pourrait être la TL.

Exercice 6

Déterminez les TL des fonctions suivantes. Vous devrez utilisez la propriété donnée dans l'exercice précédent.

(1) $f(t) = \left(t^2 + t + 1\right) \mathrm{e}^{-2t} U(t)$

(2) $f(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-t} U(t)$

(3) $f(t) = \left(\cos(2t) - \sin(t)\right) \mathrm{e}^{-3t} U(t)$

I. 5) Transformée de Laplace inverse

Le calcul TL^{-1} est plus compliqué : elle suppose une intégrale sur un chemin dans le plan complexe...

On n'aura pas à la calculer !

Le calcul TL^{-1} est plus compliqué : elle suppose une intégrale sur un chemin dans le plan complexe...

On n'aura pas à la calculer !

Soit F une fonction de p. On appelle **Transformation de Laplace inverse** l'opération :

$$TL^{-1}(F) = f, \text{ avec } f \text{ telle que } TL(f) = F$$

Quand f existe, elle est unique.

I. 5) Transformée de Laplace inverse

Le calcul TL^{-1} est plus compliqué : elle suppose une intégrale sur un chemin dans le plan complexe...

On n'aura pas à la calculer !

Soit F une fonction de p. On appelle **Transformation de Laplace inverse** l'opération :

$$TL^{-1}(F) = f, \text{ avec } f \text{ telle que } TL(f) = F$$

Quand f existe, elle est unique.

Autrement dit, pour F donné, il s'agit de **deviner**, grâce aux tables, la bonne f.

Exemple

Soit $F(p) = \dfrac{3p+5}{p^2+16}$

Exemple

Soit $F(p) = \dfrac{3p + 5}{p^2 + 16}$

$F(p) = 3 \cdot \dfrac{p}{p^2 + 16} + \dfrac{5}{4} \dfrac{4}{p^2 + 16}$

Exemple

Soit $F(p) = \dfrac{3p+5}{p^2+16}$

$F(p) = 3 \cdot \dfrac{p}{p^2+16} + \dfrac{5}{4} \dfrac{4}{p^2+16}$

Ainsi écrit on reconnaît les TL de $cos(4t) \cdot U(t)$ et de $\sin(4t) \cdot U(t)$.

$f(t) = 3\, cos(4t) \cdot U(t) + \frac{5}{4} \sin(4t) \cdot U(t)$.

C'est une solution possible. Ce qu'on vient de dire nous assure que c'est **la seule possible**.

En général, $F(p)$ est une fonction rationnelle (fraction de polynômes) et on aura recours à des décompositions en éléments simples pour faire apparaître les TL connues.

Exercice 7

Trouvez les fonctions dont la TL est donnée :

(1) $F(p) = \dfrac{3}{p}$

(2) $F(p) = \dfrac{5}{p^2}$

(3) $F(p) = \frac{3}{p+5}$

(4) $F(p) = \dfrac{3}{(p+5)^2}$

(5) $F(p) = \dfrac{4}{p^2 + 4p + 20}$

(6) $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2 + 2p + 5}$

(7) $F(p) = \dfrac{-2}{(p+3)^2}$

Exercice 8

Dans tous les cas, trouvez les valeurs de a, b, c... puis donnez la fonction telle que $TL(f) = F$.

(1) $F(p) = \dfrac{2p}{(p+1)(p+2)} = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p+2}$

(2) $F(p) = \dfrac{3}{p^2+7p+12} = \dfrac{a}{p+3} + \dfrac{b}{p+4}$

(3) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+6))} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+6}$

(4) $F(p) = \dfrac{1}{(p+5)(p^2+1)} = \dfrac{a}{p+5} + \dfrac{bp+c}{p^2+1}$

Exercice 9

Même exercice.

(1) $$F(p) = \frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+4}$$

(2) $$F(p) = \frac{5}{(p+3)\left(4p^2+12p+25\right)} = \frac{a}{p+3} + \frac{bp+c}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}$$

(3) $$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2}$$

II. TL et équations différentielles

Comment va-t-on s'y prendre ?

- On passe l'équation différentielle dans le domaine de Laplace.
- On en déduit une expression de $S(p)$, TL de la solution.
- On ramène la solution dans le domaine temporel pour avoir $s(t)$ (donc on fait une TL inverse)

Exemple de la charge de condensateur

$$(E): \quad e = \frac{1}{1\ 000} s' + s \ ; \quad s(0) = 0 \text{ et } e = 5 \sin(1\ 000\ t)$$

Exemple de la charge de condensateur

$$(E) : \quad e = \frac{1}{1\ 000} s' + s \ ; \quad s(0) = 0 \text{ et } e = 5 \sin(1\ 000\ t)$$

(1) On passe dans le domaine de Laplace. (E) devient :

$$\frac{5\ 000}{p^2 + 1\ 000\ 000} = \frac{1}{1\ 000} \left(p \cdot S(p) - s\left(0^+\right)\right) + S(p)$$

Exemple de la charge de condensateur

$$(E): \quad e = \frac{1}{1\ 000} s' + s \ ; \quad s(0) = 0 \text{ et } e = 5 \sin(1\ 000\ t)$$

(1) On passe dans le domaine de Laplace. (E) devient :

$$\frac{5\ 000}{p^2 + 1\ 000\ 000} = \frac{1}{1\ 000} \left(p \cdot S(p) - s\left(0^+\right) \right) + S(p)$$

(2) On en déduit $S(p)$:

$$S(p) = \frac{5M}{(p^2 + 1M)(p + 1000)}$$

J'ai écrit M pour 10^6.

Exemple de la charge de condensateur

$$S(p) = \frac{5M}{(p^2 + 1M)\,(p + 1000)}$$

(3) On repasse $S(p)$ dans le domaine temporel.
Pour cela il faut décomposer $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{ap + b}{p^2 + 1M} + \frac{c}{p + 1000}$$

Exemple de la charge de condensateur

$$S(p) = \frac{5M}{(p^2 + 1M)\,(p + 1000)}$$

(3) On repasse $S(p)$ dans le domaine temporel.
Pour cela il faut décomposer $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{ap + b}{p^2 + 1M} + \frac{c}{p + 1000}$$

On trouve :

$$S(p) = \frac{-2,5p + 2500}{p^2 + 1M} + \frac{2,5}{p + 1000}$$

Exemple de la charge de condensateur

$$S(p) = \frac{5M}{(p^2 + 1M)\,(p + 1000)}$$

(3) On repasse $S(p)$ dans le domaine temporel.
Pour cela il faut décomposer $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{ap + b}{p^2 + 1M} + \frac{c}{p + 1000}$$

On trouve :

$$S(p) = \frac{-2,5p + 2500}{p^2 + 1M} + \frac{2,5}{p + 1000}$$

Et donc :

$$s(t) = -2,5\cos(1000\ t) \cdot U(t) + 2,5\sin(1000\ t) \cdot U(t) + 2,5e^{-1000 \cdot t}$$

Exercice 10

Utilisez la TL pour résoudre ces équations :

(1) $f'(t) + f(t) = t\,U(t)$, avec $f(0) = 0$

(2) $f'(t) + f(t) = \sin(t)\,U(t)$, avec $f(0) = 0$

(3) $f'(t) + f(t) = t\,U(t) - (t-1)\,U(t-1)$, avec $f(0) = 0$

(4) $f''(t) + f'(t) = U(t)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

(5) $f''(t) + 4f(t) = 2U(t)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

(6) $f''(t) + 5f'(t) + 4f(t) = e^{-2t}U(t)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

III. Théorèmes

$$\lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p) = f(0^+)$$

Exemples :

- Échelon : $U(0^+) = 1$ dans le domaine temporel
  $p\ U(p) = p \cdot \frac{1}{p} \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ dans le domaine de Laplace.
- Cosinus : $\cos(0^+) = 1$ dans le domaine temporel
  $p\ \cos(p) = p \cdot \frac{p}{p^2+1} \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ dans le domaine de Laplace.
- Sinus : $\sin(0^+) = 0$ dans le domaine temporel
  $p\ \sin(p) = p \cdot \frac{1}{p^2+1} \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ dans le domaine de Laplace.

III. 2) Valeur finale

$$\lim_{p \to 0} p \cdot F(p) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

À condition que $\lim_{t \to +\infty} f(t) \in \mathbb{R}$

Exemples :

- Échelon : $\lim_{t \to +\infty} U(t) = 1$ dans le domaine temporel
  $p\, U(p) = p \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow{p \to 0} 1$ dans le domaine de Laplace.
- Cosinus : $\lim_{t \to +\infty} \cos(t)$ n'existe pas dans le domaine temporel. Donc le théorème ne s'applique pas.
- Exponentielle : $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-3\,t}\, U(t) = 0$ dans le domaine temporel
  $p\, \dfrac{1}{p+3} \xrightarrow{p \to 0} 0$ dans le domaine de Laplace.