Laplace - Fiche méthode

Problème posé : Une équation différentielle linéaire à résoudre. Deux exemples :

$$(E_1) : \quad 4\,s'(t) + s(t) = 9 \text{ pour } t \geqslant 0 \quad ; \quad s(0) = 0$$

$$(E_2) : \quad s''(t) + 6\,s'(t) + 13\,s(t) = \sin(5t) \text{ pour } t \geqslant 0 \quad ; \quad s(0) = s'(0) = 0$$

On utilisera ces exemples dans les boîtes suivantes.

Formulation avec $U(t)$: Pour plus de rigueur, on adopte une notation utilisant la fonction $U(t)$ plutôt que la mention « pour $t \geqslant 0$ »qui reste vague sur ce qui se passe pour $t < 0$.

$$(E_1) : \quad 4\,s'(t) + s(t) = 9\,U(t) \quad ; \quad s(0) = 0$$

$$(E_2) : \quad s''(t) + 6\,s'(t) + 13\,s(t) = \sin(5t)\,U(t) \quad ; \quad s(0) = s'(0) = 0$$

Les sujets de BTS sont écrits directement avec cette formulation.

Passage dans le domaine de Laplace

$$s(t) \overset{TL}{\to} S(p) \quad ; \quad s'(t) \overset{TL}{\to} p\,S(p) - s(0) \quad ; \quad s''(t) \overset{TL}{\to} p\,TL(s') - s'(0)$$

Dans nos exemples, on obtient $TL(s') = p\,S(p)$ et $TL(s'') = p^2\,S(p)$.

Après TL, factorisation de $S(p)$ et isolation de $S(p)$:

$$TL(E_1) : \quad 4\,p\,S(p) + S(p) = \frac{9}{p} \Rightarrow (4p+1)\,S(p) = \frac{9}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{9}{p\,(4\,p+1)}$$

$$TL(E_2) : \quad p^2\,S(p) + 6\,p\,S(p) + 13\,S(p) = \frac{5}{p^2+25} \Rightarrow S(p) = \frac{5}{(p^2+25)(p^2+6p+13)}$$

Décomposition en éléments simples : La forme obtenue pour $S(p)$ ne permet pas en général de calculer sa TL^{-1} car elle ne correspond à aucune forme connue. C'est pour cette raison que l'on passe par une décomposition en éléments simples.

C'est la partie qui occasionne le plus de calculs. On ne vous demandera pas de deviner quoi que ce soit, ce qui est dit ici vise à vous donner une meilleur vue d'ensemble.

$$\frac{\text{polynome en } p \text{ de degré } m}{\text{polynome en } p \text{ de degré } n > m} = \frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_2} + \frac{a_3}{p+p_3} + \cdots$$

Où les $a_i \in^{\mathbb{C}}$ sont des constantes et $-p_1$, $-p_2$, ... sont les racines, *éventuellement complexes*, du dénominateur, ce que l'on appelle des **pôles**.

Ensuite la TL^{-1} sera évidente :

$$\frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_2} + \frac{a_3}{p+p_3} + \cdots \overset{TL^{-1}}{\to} \left[a_1\,e^{-p_1\,t} + a_2\,e^{-p_2\,t} + a_3\,e^{-p_3\,t} + \cdots\right]\,U(t)$$

Cas d'un pôle double : Les pôles peuvent avoir une multiplicité. *Ce ne sera jamais plus que 2 (donc pôle double), et encore c'est peu fréquent.*

Si un pôle $-p_i$ est double, la décomposition contiendra $\dfrac{a_i}{p+p_i} + \dfrac{a_i'}{(p+p_i)^2}$

$$\frac{a_i}{p+p_i} + \frac{a_i'}{(p+p_i)^2} \overset{TL^{-1}}{\to} \left[a_i\,e^{-p_i\,t} + a_i'\,t\,e^{-p_i\,t}\right]\,U(t)$$

Cas de pôles complexes : Si $p_i \notin \mathbb{R}$, comme nos fonctions sont réelles, il y aura forcément un autre $p_j = \overline{p_i} = \alpha \pm i\,\omega$ de sorte que dans la décomposition :

$$\frac{a_i}{p+p_i} + \frac{a_j}{p+p_j} = A\,\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2} + B\,\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

Et alors par transformation inverse :

$$A\,\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2} + B\,\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \overset{TL^{-1}}{\to} [A\cos(\omega\,t) + B\sin(\omega\,t)]\;\;e^{-\alpha\,t}\,U(t)$$

Exemple E1

$$S(p) = \frac{9}{p\,(4\,p+1)} = \frac{9}{p} - \frac{9}{p+\frac{1}{4}} \overset{TL^{-1}}{\to} s(t) = \left[9 - 9\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right]\;U(t)$$

On peut conclure en supprimant le formel $U(t)$:

$$\text{pour } t \geqslant 0, s(t) = 9 - 9\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$$

Exemple E2

$$S(p) = \frac{5}{(p^2+25)(p^2+6p+13)} = A\,\frac{p}{p^2+25} + B\,\frac{5}{p^2+25} + C\,\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} + D\,\frac{2}{(p+3)^2+2^2}$$

$$\overset{TL^{-1}}{\to} s(t) = \left[A\,\cos(5\,t) + B\,\sin(5t) + C\,\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t) + D\,\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)\right]\;U(t)$$

Je n'ai pas indiqué le calcul des A, B, C et D qui est fastidieux et n'apporte pas grand chose ici.
On peut conclure en supprimant le formel $U(t)$:

$$\text{pour } t \geqslant 0, s(t) = A\,\cos(5\,t) + B\,\sin(5t) + C\,\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t) + D\,\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)$$

Un physicien aurait plutôt tendance à écrire :

$$\text{pour } t \geqslant 0, s(t) = A_1\,\sin(5t+\varphi_1) + A_2\,\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t+\varphi_2)$$

où on peut calculer tous les coefficients.
Fastidieux aussi mais en situation réelle on pourrait approximer et tout faire avec un ordinateur, seul le principe de la méthode est important à connaître.

Valeur finale et initiale : Pour les théorèmes de valeur finale et initiale on calcule $p\,S(p)$ et on observe ce qui se passe quand $p \to +\infty$ et $p \to 0$.

$$\lim_{p\to 0} p\,S(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \quad ; \quad \lim_{p\to+\infty} p\,S(p) = \lim_{t\to 0+} f(t)$$

Mais cela ne fonctionne **que si la limite temporelle existe**!
Dans le cas E1, par exemple, $pS(p) = 9 - 9\frac{p}{p+\frac{1}{4}} \overset{p\to 0}{\to} 9 = \lim_{t\to+\infty} s(t)$.