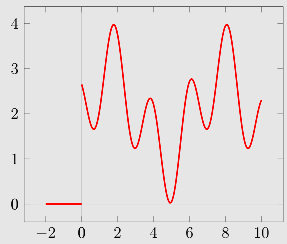
Transformation de Laplace

Signal causal

- **Fonction causale :** c'est une fonction nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- **Échelon :** $U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$
- $U(t)$ force la causalité. Par exemple $f(t) = sin(3t)U(t)$ est causale.



f une fonction causale. La fonction $F = TL(f)$, transformée de Laplace de la fonction f, est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-p\,t}\mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{C}$$

Expression fonction	**Expression TL**
$U(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$\mathrm{e}^{-a\,t} \cdot U(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\cos(\omega\,t) \cdot U(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega\,t) \cdot U(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t^n \cdot U(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ avec $n! = 1 \times 2 \cdots \times n$
$f(t-a)$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(p) \cdot \mathrm{e}^{-ap}$ avec $F = TL(f)$
$f(t) \cdot \mathrm{e}^{-at}$ avec $a \in \mathbb{R}$	$F(p+a)$ avec $F = TL(f)$
$f'(t)$ ($\spadesuit$)	$p \cdot F(p) - f\left(0^+\right)$ avec $F = TL(f)$

Transformée inverse : Pour trouver $TL^{-1}(F) = f$ avec f causale, il suffit de trouver une fonction f qui pourrait convenir en utilisant le tableau précédent. Cette fonction : si on en trouve une, c'est la bonne.

Résolution équation différentielle : On dispose d'une équation différentielle dont s est la solution causale, avec toutes les conditions initiales voulues.

(a) Passage de l'équation dans le domaine de Laplace avec ($\spadesuit$)
On obtient une équation donnant $S(p)$.

(b) $S(p)$ a une forme de fonction rationnelle. On la décompose en éléments simples.

(c) On reconnaît les différents éléments de la décomposition avec le tableau précédent.
On en déduit $s = TL^{-1}(S)$.

Valeur initiale :

$$\lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p) = f\left(0^+\right)$$

Valeur finale :

$$\lim_{p \to 0} p \cdot F(p) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$