

Exo 1 Calculer la TL

Donnez la TL des fonctions causales suivantes :

- (1) $f(t) = \sin(5t) \cdot U(t)$
- (2) $f(t) = \cos(2t) \cdot U(t)$
- (3) $f(t) = (\sin(3t) - \cos(3t)) \cdot U(t)$
- (4) $f(t) = (t^3 + 2t^2 - 4t + 5) \cdot U(t)$
- (5) $f(t) = (t^2 + t - e^{-3t}) U(t)$
- (6) $f(t) = (\cos(2t) - \sin(t)) U(t)$

Exo 2 Dérivation

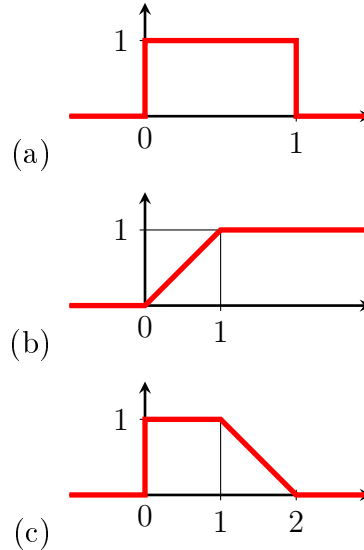
On utilise ici la propriété :
 $F_{der}(p) = p \cdot F(p) - f(0^+)$.

- (1) Soit $f(t) = \cos(3t) \cdot U(t)$.
 - (a) Déterminez $F(p)$.
 - (b) Calculez $f'(t)$ puis $F_{der} = TL(f')$.
 - (c) Utilisez la formule $F_{der} = p \cdot F(p) - f(0^+)$ et vérifiez que vous retrouvez la même chose.
- (2) Même question avec $f(t) = (3t^2 + 5t - 1) \cdot U(t)$.
- (3) Si $f' = f$, avec $f(0) = 1$, déterminez $F(p)$.
- (4) Soit $2f'(t) = f(t) + \sin(5t)$ avec $f(0) = 0$. Déterminez $F(p)$.
- (5) On sait que $F(p) = \frac{p+2}{p^2+5}$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Déterminez $TL(f'')$.

Exo 3 Retard

On utilise ici la propriété : Si $f_\tau = f(t - \tau)$ et $F_\tau = TL(f_\tau)$ alors $F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p)$.

- (1) Donnez la TL de $t \mapsto U(t - 1)$.
- (2) Représentez graphiquement $f : t \mapsto U(t) - U(t - 1)$
- (3) Donnez la TL de f .
- (4) En raisonnant de même, donnez la TL des fonctions dont on a donné les représentations ci-dessous.



Exo 4 Autres TL

Donnez les TL des fonctions suivantes.

Vous devrez utiliser la propriété de l'exercice précédent.

- (1) $f(t) = \cos(t - 1)U(t - 1)$
- (2) $f(t) = t \cdot U(t - 4)$
- (3) $f(t) = (t^2 + 4t - 3)U(t - 2)$
Pour celui-ci, montrez que
 $f(t) = ((t - 2)^2 + 8(t - 2) + 9)U(t - 2)$

Exo 5 Multiplication par e^{-at}

On utilise ici la propriété : Si $f_a = e^{-at} f(t)$ et $F_a = TL(f_a)$ alors $F_a(p) = F(p + a)$.

Soit $G(p) = \frac{p + 2}{p^2 + 4p + 29}$.

- (1) Montrez que $G(p) = \frac{(p + 2)}{(p + 2)^2 + 25}$

Autrement dit, si $F(p) = \frac{p}{p^2 + 25}$, alors $G(p) = F(p + 2)$.

- (2) De quelle fonction f , F peut-elle être la TL ?
- (3) Déduisez-en une fonction dont G pourrait être la TL.

Exo 6 Autres TL

Déterminez les TL des fonctions suivantes. Vous devez utiliser la propriété donnée dans l'exercice précédent.

(1) $f(t) = (t^2 + t + 1)e^{-2t}U(t)$

(2) $f(t) = \cos(t)e^{-t}U(t)$

(3) $f(t) = (\cos(2t) - \sin(t))e^{-3t}U(t)$

Exo 7 Trouver les originaux

Exo 8 Décomposition en éléments simples

Dans quelques-uns des exemples ci-dessous, on utilise la propriété de l'exercice 5.

Trouvez les fonctions dont la TL est donnée :

(1) $F(p) = \frac{3}{p}$

(2) $F(p) = \frac{5}{p^2}$

(3) $F(p) = \frac{3}{p+5}$

(4) $F(p) = \frac{3}{(p+5)^2}$

(5) $F(p) = \frac{4}{p^2 + 4p + 20}$

(6) $F(p) = \frac{p-1}{p^2 + 2p + 5}$

(7) $F(p) = \frac{-2}{(p+3)^2}$

Dans tous les cas, trouvez les valeurs de a, b, c, \dots puis donnez l'expression de la fonction f telle que $TL(f) = F$.

(1) $F(p) = \frac{2p}{(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2}$

(2) $F(p) = \frac{3}{p^2 + 7p + 12} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+4}$

(3) $F(p) = \frac{1}{p(p+6)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+6}$

(4) $F(p) = \frac{1}{(p+5)(p^2+1)}$
 $= \frac{a}{p+5} + \frac{bp+c}{p^2+1}$

Exo 9 Trouver les originaux

Même exercice.

(1) $F(p) = \frac{p+2}{(p+3)(p+4)} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+4}$

(2) $F(p) = \frac{5}{(p+3)(4p^2+12p+25)} = \frac{a}{p+3} + \frac{bp+c}{(p+\frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}}$

(3) $F(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2}$

Exo 10 Équations différentielles

Utilisez la TL pour résoudre ces équations :

(1) $f'(t) + f(t) = tU(t)$, avec $f(0) = 0$

(2) $f'(t) + f(t) = \sin(t)U(t)$, avec $f(0) = 0$

(3) $f'(t) + f(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$, avec $f(0) = 0$

(4) $f''(t) + f'(t) = U(t)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

(5) $f''(t) + 4f(t) = 2U(t)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

(6) $f''(t) + 5f'(t) + 4f(t) = e^{-2t}U(t)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$