On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions **causales** notées respectivement e et s.

On suppose dans tout l'exercice que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.
Les fonctions e et s sont liées sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par l'équation différentielle :

$$(E): \quad s''(t) + 2ms'(t) + A\,s(t) = A\,e(t), \quad \text{avec} \quad e(t) = \mathcal{U}(t)$$

On précisera les valeurs de m et de A quand on voudra faire des calculs.
On impose $0 < A$ et $0 < m < \sqrt{A}$.

On note E et S les transformées de Laplace respectives des fonctions e et s.

(1) Donner l'expression de $E(p)$

(2) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E), montrer que

$$S(p) = \frac{A}{p\ (p^2 + 2mp + A)}$$

(3) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel p, on ait

$$S(p) = \frac{a}{p} + \frac{bp + c}{p^2 + 2mp + A}$$

(4) On cherche à trouver une fonction dont la transformée de Laplace serait $F(p) = \dfrac{p + 2m}{p^2 + 2mp + A}$.

(a) Montrez que $F(p) = \dfrac{p + m}{(p + m)^2 + A - m^2} + \dfrac{m}{(p + m)^2 + A - m^2}$

(b) On pose $\omega^2 = A - m^2$ et $G(P) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2} + \dfrac{m}{p^2 + \omega^2}$.
Donnez l'expression $g(t)$ de la fonction g telle que $TL(g) = G$?

(c) Constatant que $F(p) = G(p + m)$, déduisez-en l'expression $f(t)$ de la fonction f telle que $TL(f) = F$.

Pour la suite, on admet : que l'expression de s pour $t \geqslant 0$ est :

$$s(t) = 1 - \left(\cos(\omega\, t) + \frac{m}{\omega}\sin(\omega\, t)\right)\,\mathrm{e}^{-mt}, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{A - m^2}$$

(5) Déterminer $s_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$. On appellera cette limite « valeur finale de s ».
Donner une interprétation graphique de cette limite.

(6) Tracer la courbe représentative de $s(t)$ sur le graphique ci-dessous :

(a) $A = 9$ et $m = 0,6$ en rouge.

(b) $A = 9$ et $m = 2,1$ en bleu.

(7) On appelle temps de réponse le temps t_R nécessaire pour que le signal entre dans la zone $s_\infty \pm 5\,\%$, donc ici la zone grisée allant de $0,95$ à $1,05$.
Donnez t_R dans les deux cas précédents.