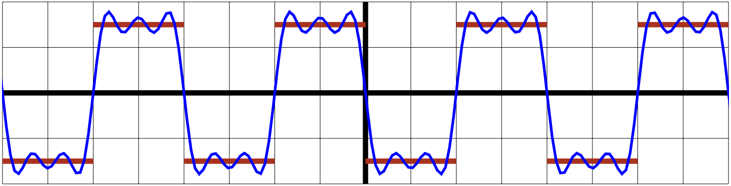


06 - Décomposition en série de Fourier

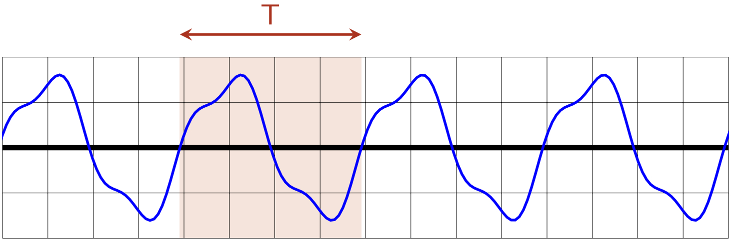
Le cours vous est fourni, inutile de le copier.
En revanche, faites soigneusement les exercices.

4 octobre 2018

- Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).
- Mathématicien et physicien.
- Professeur à l'age de 16 ans.
- Manque de peu de passer à la guillotine pendant la Terreur.
- Participe à la campagne d'Égypte de Napoléon.
- Fait partie des 72 savants dont le nom est écrit sur la Tour Eiffel.

I. Fonctions périodiques

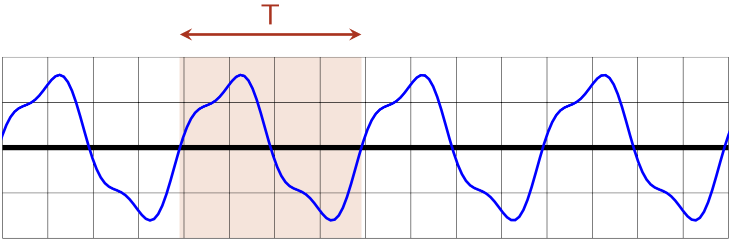
I. 1) Période et pulsation



- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
  T est souvent un temps, en secondes.

$$\boxed{s(t+T) = s(t)}$$

I. 1) Période et pulsation

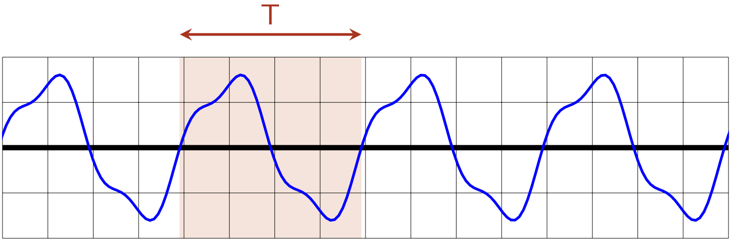


- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
  T est souvent un temps, en secondes.

$$\boxed{s(t+T) = s(t)}$$

- **fréquence** $f = \dfrac{1}{T}$. La fréquence est en $s^{-1} = Hz$.
  Fréquence : **nombre de répétition du motif par unité de temps**.

I. 1) Période et pulsation

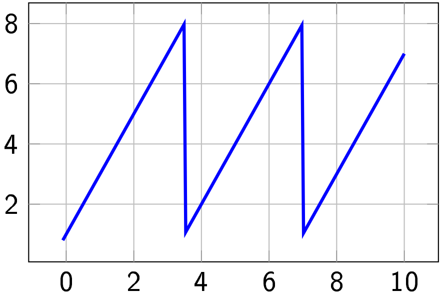


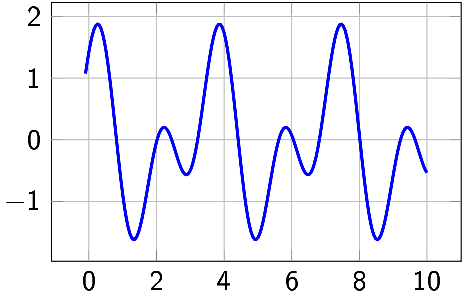
- Un signal périodique a un motif de longueur T qui se répète.
  T est souvent un temps, en secondes.

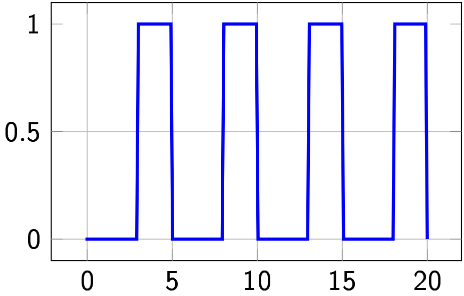
$$s(t+T) = s(t)$$

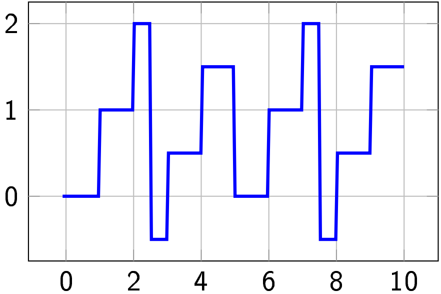
- **fréquence** $f = \dfrac{1}{T}$. La fréquence est en $s^{-1} = Hz$.
  Fréquence : **nombre de répétition du motif par unité de temps**.
- **Pulsation** ω définie par $\omega \cdot T = 2\pi$. ω est en $rad \cdot s^{-1}$.

Exercice 1 : donnez T et ω





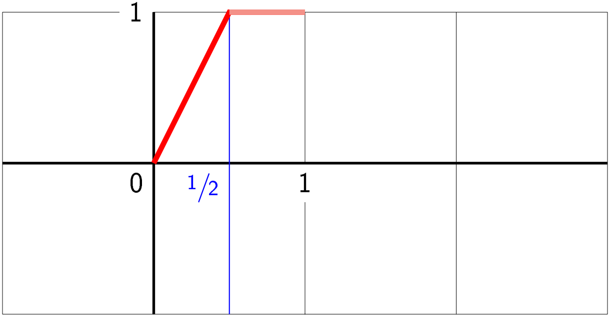




I. 2) Fonction définie par morceaux

Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.
Exemple : Soit s un signal **impair** de période $T = 2$ et

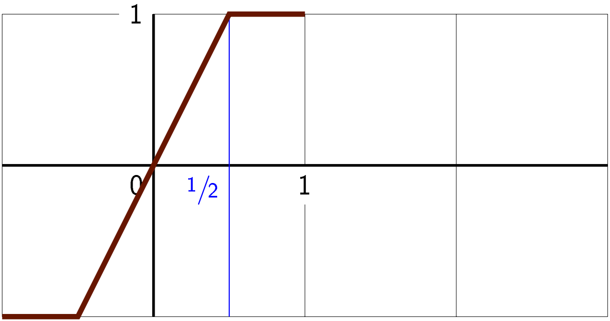
$$s(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$



I. 2) Fonction définie par morceaux

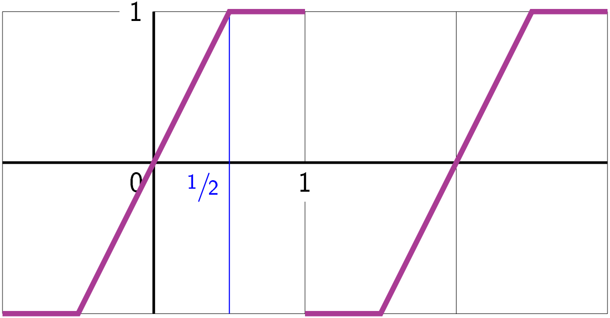
Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.
Exemple : Soit s un signal **impair** de période $T = 2$ et

$$s(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$



Les fonctions que l'on va utiliser seront souvent définies par morceaux.
Exemple : Soit s un signal **impair** de période $T = 2$ et

$$s(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$$



Exercice 2

Dans les cas suivant, on vous demande de tracer deux périodes du signal s.

(a) s pair et de période 4 et :

$$s(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

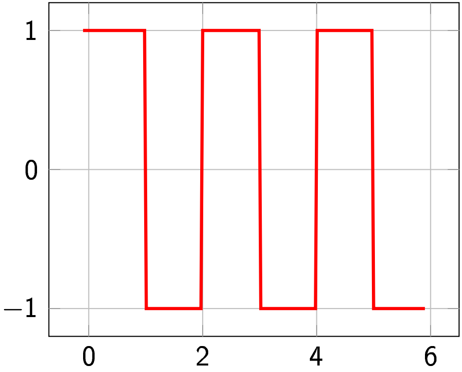
(b) s de période 3 et :

$$s(t) = \begin{cases} 2t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 3 - t \text{ si } 1 < t < 3 \end{cases}$$

(c) s de période 2π et sur $[0; 2\pi]$,
$s(t) = t\,(2\pi - t)$

II. Décomposition en sinusoïdes

Exemple : un signal rectangulaire



Un signal périodique peut être décomposé en sinusoïdes.

Ici la périodes est $T = 2$

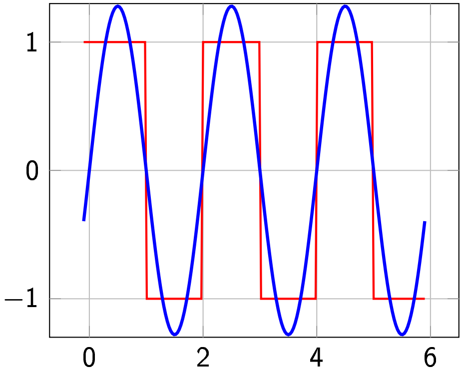
donc $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Premier harmonique = fondamental

On souhaite trouver un sinus qui passe au plus près du signal.

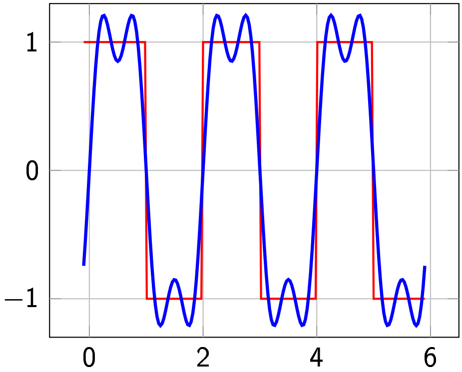
On propose
$S(t) = 1,28 \sin(\pi\ t)$

Faites-le en même temps avec votre calculatrice.



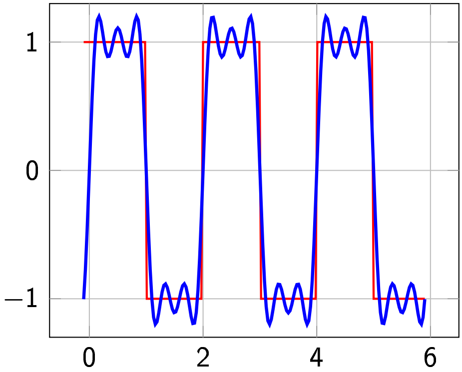
Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.
Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$S(t) = 1,28 \sin(\pi\, t) + 0,43 \sin(3\pi\, t)$$



Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.
Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

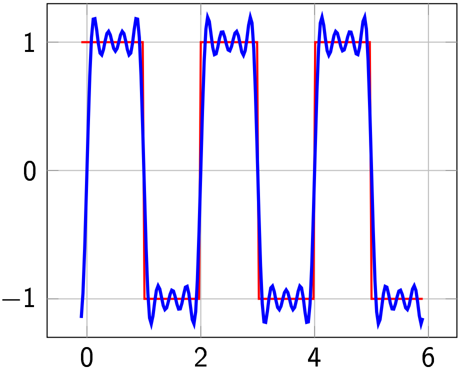
$$S(t) = 1,28\sin(\pi\ t) + 0,43\sin(3\pi\ t) + 0,26\sin(5\pi\ t)$$



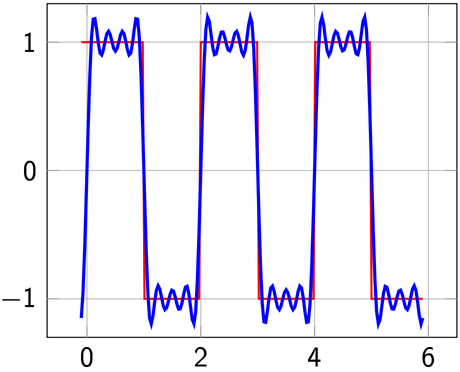
harmoniques...

Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux. Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...

$$\begin{aligned} S(t) = & 1,28\sin(\pi\ t) \\ & + 0,43\sin(3\pi\ t) \\ & + 0,26\sin(5\pi\ t) \\ & + 0,18\sin(7\pi\ t) \end{aligned}$$



Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux. Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...



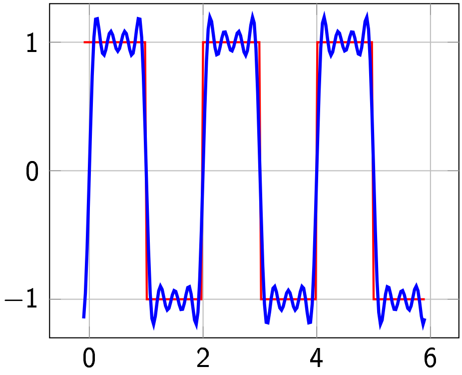
$$\begin{aligned} S(t) =& 1,28\sin(\pi\ t) \\ &+ 0,43\sin(3\pi\ t) \\ &+ 0,26\sin(5\pi\ t) \\ &+ 0,18\sin(7\pi\ t) \end{aligned}$$

$$S(t) = b_1\sin(\omega\ t) + b_2\sin(2\,\omega\ t) + \cdots = \sum_{n\geqslant 1} b_n\sin(n\,\omega\ t)$$

Avec $b_1 =$; $b_2 =$; $b_3 =$; $b_4 =$; $b_5 =$

harmoniques...

Avec un seul sinus, on ne peut pas faire mieux.
Mais on peut ajuster en ajoutant d'autres sinus...



$$\begin{aligned} S(t) = & 1,28 \sin(\pi\, t) \\ & + 0,43 \sin(3\pi\, t) \\ & + 0,26 \sin(5\pi\, t) \\ & + 0,18 \sin(7\pi\, t) \end{aligned}$$

$$S(t) = b_1 \sin(\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \cdots = \sum_{n \geqslant 1} b_n \sin(n\,\omega\, t)$$

Avec $b_1 = 1,28$; $b_2 = 0$; $b_3 = 0,43$; $b_4 = 0$; $b_5 = 0,26$

Observations

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.

Observations

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.

Observations

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.

Observations

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.
- Les $b_n \searrow$. On devine que quand $n \to +\infty$, $b_n \to 0$.

Observations

- À force d'ajouter des sin, $S(t)$ devient très proche du signal.
- Les variations rapides du signal créent plus de difficultés.
- Certains b_n sont nuls et on ne voit pas de cos. C'est un cas particulier.
- Les $b_n \searrow$. On devine que quand $n \to +\infty$, $b_n \to 0$.
- On devine que si on somme à l'∞ on arrivera infiniment proche du signal. Mais si on se contente d'une approximation, pas besoin d'aller jusqu'à l'∞.

Exercice 3

Faites la même chose pour les deux cas suivants :

$$
\begin{aligned}
S(t) = &0,637\sin(\pi\ t)\\
&-0,318\sin(2\pi\ t)\\
&+0,212\sin(3\pi\ t)\\
&-0,159\sin(4\pi\ t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(t) = &0,25-0,405\cos(\pi t)\\
&+0,203\cos(2\pi t)\\
&+0,045\cos(3\pi t)\\
&+0,016\cos(5\pi t)\\
&+0,023\cos(6\pi t)
\end{aligned}
$$

III. Série de Fourier

III. 1) Définition

f est une fonction de période T.
On appelle **série de Fourier** associée à f la fonction :

$$S_f : t \mapsto a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t)\,\mathrm{d}t = f_{MOY}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t)\,\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t)\,\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients qui font que S_F est au plus près de f, comme dans les exemples précédents.
$\int_T \cdots \mathrm{d}t$ représente une intégrale prise sur une période quelconque.

Exercice 4 : Primitive

Donnez les primitives de

(a) $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$

(b) $f(t) = \cos(t)$

(c) $f(t) = \sin(t)$

(d) $f(t) = 4\sin(10t)$

(e) $f(t) = 4\cos(n\omega t)$

Exercice 5 : Intégrales

(a) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \left(5t^2 + t + 2\right) \mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos(t)\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi 9\cos(n\,t)\mathrm{d}t$

Exercice 6

Calculez a_n et b_n dans les cas suivants :

(a) période $T = 2$, f impaire, $f(t) = 1$ pour $0 \leqslant t < 1$

On peut se demander ce que doit valoir $f(-1)$.
1 ou -1 ou encore 0 ? Pour le calcul des coefficients a_n et b_n, c'est sans importance et de surcroît, ce genre de problème est purement théorique.

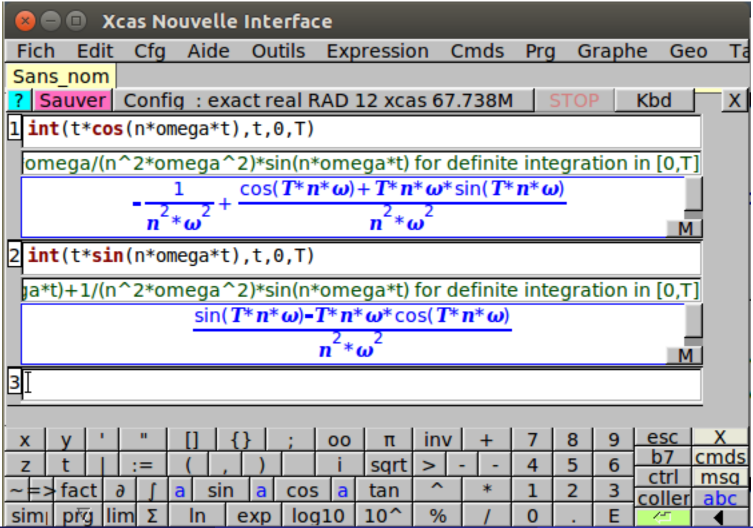
(b) période $T = 3$, $f(t) = 1$ pour $0 \leqslant t < 1$ et 0 sinon.

(c) période $T = 1$, $f(t) = t$ sur $[0; 1[$.

Ce calcul est difficile. Réfléchissez-y une seconde mais ne vous inquiétez pas de ne pas trouver la méthode.

Solution pour Exo 6.3

La technique de calcul est difficile et n'est pas à connaître.
On utilise un logiciel.



III. 2) Convergence

La série S_f est-t-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

III. 2) Convergence

La série S_f est-t-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

Conditions de Dirichlet : $S_f(t) = f(t)$ à certaines conditions :

- La dérivée f' est continue, sauf éventuellement quelques trous.
- Pas de d'infinis, pas de tangentes verticales...
- Si f a une discontinuité (trou), à cet endroit là,
  $S_f(t) \to$ le milieu du trou.

III. 2) Convergence

La série S_f est-t-elle bien définie ? Quelle rapport entre S_f et f ?

Conditions de Dirichlet : $S_f(t) = f(t)$ à certaines conditions :

- La dérivée f' est continue, sauf éventuellement quelques trous.
- Pas de d'infinis, pas de tangentes verticales...
- Si f a une discontinuité (trou), à cet endroit là,
  $S_f(t) \to$ le milieu du trou.

Ce qu'il faut retenir : La **série infinie** permet de retrouver f. Si on ne somme pas jusqu'à ∞, on n'aura qu'une **approximation**.
S_f n'est rien d'autre que f écrit sous forme d'une **somme d'harmoniques**.

Exercice 7

Dans tous les cas suivants, dites si $S_f \to f$.
Précisez s'il y a des t pour lesquels $S_f(t) \neq f(t)$.

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$, de période $T = 2$

(b) $f(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$

(c) $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

(d) $f(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

III. 3) Fonction paire ou impaire

$$S_f(t) = a_0 + \underbrace{\sum_{n \geqslant 1} a_n \ \cos(n\,\omega\,t)}_{\text{pair}} + \underbrace{\sum_{n \geqslant 1} b_n \ \sin(n\,\omega\,t)}_{\text{impair}}$$

Si f **paire** :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = 0$$

Si f **impaire** :

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8

Calculez les coefficients a_n et b_n dans les cas suivants :

(a) f impaire, de période $T = 6$ avec $f(t) = \begin{cases} 0,5 \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t < 2 \\ 0,5 \text{ si } 2 < t < 3 \end{cases}$,

(b) f paire et de période $T = 2$ avec $f(t) = \begin{cases} 1 - 2t \text{ si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$.

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}$$

III. 4) Puissance

signal $u(t)$ de période T.

$$P = U_{EFF}^2 = \overline{u^2} = \frac{1}{T}\int_T u(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

À rapprocher de la notion de puissance dans circuit électrique : dans une résistance, $P = \frac{U^2}{R}$ et donc $P_{MOY} = \frac{U_{EFF}^2}{R}$.

Exercice 9

Calculer P dans les cas suivants :

(a) $u(t) = 12$

(b) $u(t) = K$

(c) $u(t) = t$ sur $[0; 2]$ et période $T = 2$

(d) $u(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$

(e) $u(t) = A \sin(\omega\, t)$

(f) $u(t) = A \cos(\omega\, t)$

(g) $u(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

signal $u(t)$ de période T. La décomposition en série de Fourrier est :

$$S_u(t) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)$$

On a déjà dit que $u(t) = S_u(t)$ (sauf éventuellement en quelques t)
On aura de plus :

$$P = \overline{u^2} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 1} a_n^2 + b_n^2$$

Exercice 10

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0;1]$, $f(t) = 1 - t$.

(a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.

(b) Montrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

(c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

```
int((1-t)*cos(n*omega*t),t,0,T/2)
```

$$\frac{1}{n^2*\omega^2}+\frac{-2*\cos(\frac{T*n*\omega}{2})+2*n*\omega*\sin(\frac{T*n*\omega}{2})-T*n*\omega*\sin(\frac{T*n*\omega}{2})}{2*n^2*\omega^2}$$

En déduire que $a_n = \dfrac{2}{\pi^2\, n^2}\left(1-(-1)^n\right)$

(d) Calculer $P = \overline{f^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)^2 \mathrm{d}t$

(e) Soit $S_N(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \cos(n\,\pi\, t)$ une série de Fourrier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint $99,9\,\%$ de P ?

Exercice 10

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0;1]$, $f(t) = 1 - t$.

(a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.

(b) Montrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

(c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

```
int((1-t)*cos(n*omega*t),t,0,T/2)
```

$$\frac{1}{n^2*\omega^2}+\frac{-2*\cos(\frac{T*n*\omega}{2})+2*n*\omega*\sin(\frac{T*n*\omega}{2})-T*n*\omega*\sin(\frac{T*n*\omega}{2})}{2*n^2*\omega^2}$$

En déduire que $a_n = \dfrac{2}{\pi^2\, n^2}\left(1-(-1)^n\right)$

(d) Calculer $P = \overline{f^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)^2 \mathrm{d}t$ $\quad P = \frac{1}{3}$

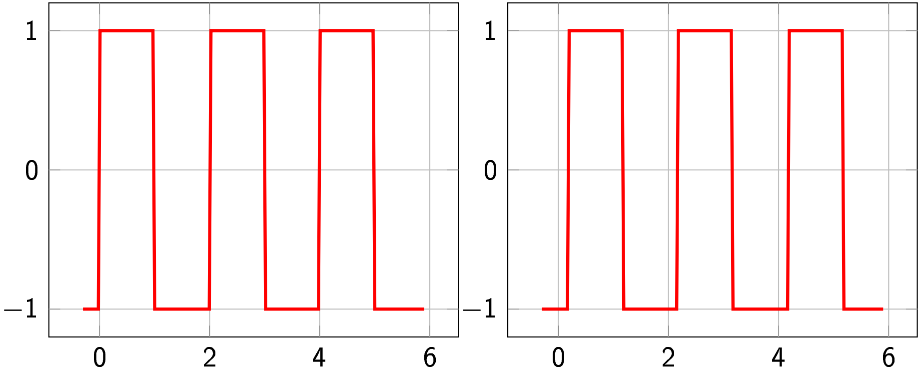
(e) Soit $S_N(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \cos(n\,\pi\,t)$ une série de Fourrier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint 99,9 % de P ? $\quad$ pour $N = 3$, $P_{S_N} \simeq 99{,}94\,\%\, P$

III. 6) Spectre

Pourquoi y a-t-il des $\sin(n\omega t)$ et $\cos(n\omega t)$ de même période dans la décomposition ?
Pour comprendre, nous allons décomposer deux signaux presque identiques : le deuxième est légèrement retardé.

Pourquoi y a-t-il des $\sin(n\omega t)$ et $\cos(n\omega t)$ de même période dans la décomposition ?
Pour comprendre, nous allons décomposer deux signaux presque identiques : le deuxième est légèrement retardé.



À gauche

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	0	$1,27$
2	0	0
3	0	$0,42$
4	0	0
5	0	$0,25$
6	0	0

À droite

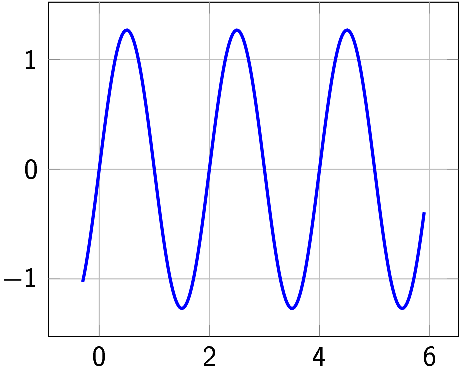
$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	$-0,64$	$1,10$
2	0	0
3	$-0,42$	0
4	0	0
5	$0,13$	$-0,22$
6	0	0

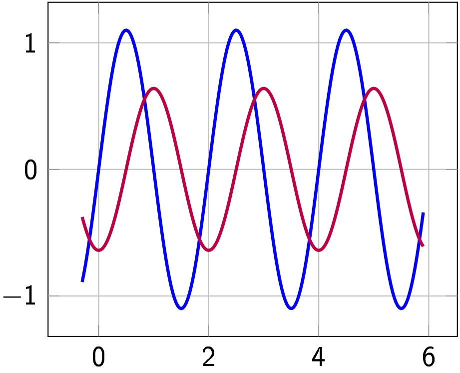
Les deux tableaux semblent très différents, pourtant les deux signaux étaient très proches.

Par exemple, considérons l'harmonique de rang 1.

À gauche



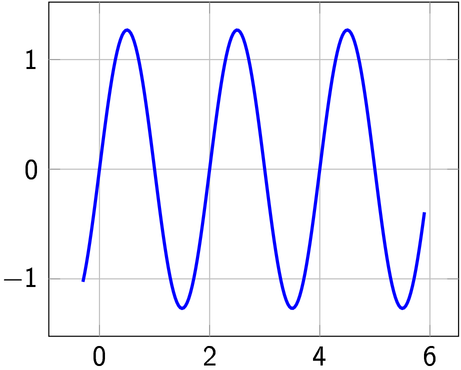
À droite



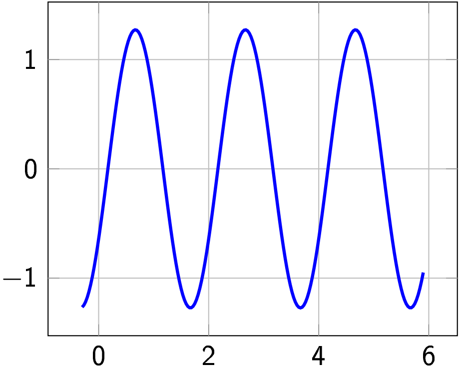
Là encore, on a l'impression que c'est très différent.

Par exemple, considérons l'harmonique de rang 1.

À gauche



À droite



Là encore, on a l'impression que c'est très différent.

Mais si on somme à droite...

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenter par la **phase** φ_n,

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenter par la **phase** φ_n,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n,

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenter par la **phase** φ_n,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n,
- la notation a_n et b_n est moins claire, mais on passer de l'une à l'autre avec :

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

Ce qu'il faut retenir

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

- Physiquement a_n et b_n représentent une même harmonique,
- en BTS, on a toujours $a_n = 0$ ou $b_n = 0$ pour simplifier,
- l'harmonique n a une amplitude A_n et un décalage temporel représenter par la **phase** φ_n,
- les physiciens préfèrent l'écriture de droite qui font apparaître clairement A_n et φ_n,
- la notation a_n et b_n est moins claire, mais on passer de l'une à l'autre avec :
$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$
- Les A_n constituent le **spectre**.

Exercice 11

Vérifiez que les signaux ont le même spectre.

À gauche

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	0	$1,27$
2	0	0
3	0	$0,42$
4	0	0
5	0	$0,25$
6	0	0

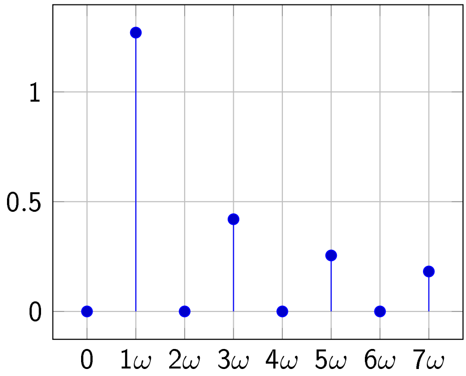
À droite

$$a_0 = 0$$

n	a_n	b_n
1	$-0,64$	$1,10$
2	0	0
3	$-0,42$	0
4	0	0
5	$0,13$	$-0,22$
6	0	0

Représentation graphique du spectre

Sur un graphique, on représente des barres de hauteurs A_n pour chaque harmonique.

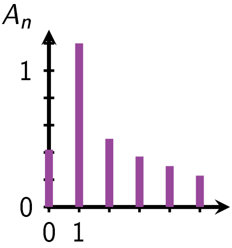


Exercice 12

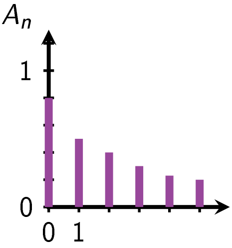
Soit la fonction f de période $T = 2\pi$ développable en série de Fourier et dont le développement est :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geqslant 1} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right]$$

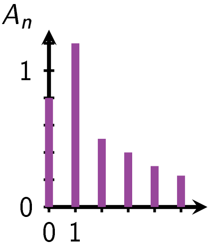
Indiquez le spectre correspondant.



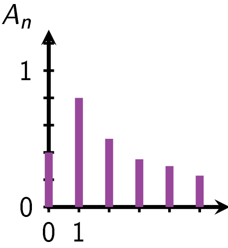
(a)



(b)



(c)



(d)