1 Résumé de l'idée générale

- On prend un système physique. On le perturbe d'un côté (*signal entrée* e) on veut savoir comment il réagit (*signal sortie* s).
  On appelle « Filtre » ce système qui transforme un signal e en signal s.

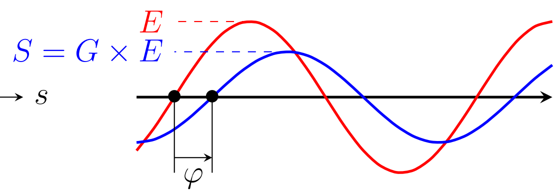
$$e \longrightarrow \boxed{\text{Filtre}} \longrightarrow s$$

- On sait écrire une équation différentiel qui définit le lien $e \mapsto s$

$$\textbf{Exemple :} \quad e = \tau\, s' + s$$

- Pour un e quelconque, il est difficile de prévoir s.
  Mais, si e est $\sim$, alors s aussi et le lien $e \mapsto s$ devient très simple !
  Pour une fréquence donnée, il suffit de connaître le **déphasage** φ et le **gain** G.

$$e \longrightarrow \boxed{\text{Filtre}} \longrightarrow s$$



Seule condition : l'équation différentielle doit être linéaire

- On raisonne alors ainsi :

$$e \text{ compliqué} \overset{\text{Fourier}}{=} \sum \tilde{e}_n \longrightarrow \boxed{\text{Filtre}} \longrightarrow \sum \tilde{s}_n \overset{\text{Fourier}}{=} s \text{ compliqué}$$

  Pour chaque harmonique, le calcul $e_n \mapsto s_n$ est simple, il suffit de connaître le gain G_n et le déphasage φ_n.

  Non seulement, le calcul est ainsi plus facile à faire, mais en plus il permet de mieux comprendre physiquement la façon dont e se transforme en s.

2 Pourquoi passer par les complexes ?

2.1 Cas réel

$$\textbf{Exemple :} \quad e = 5\, s' + s \quad \text{avec } e = E\cos(\omega\, t)$$

On peut prouver que la solution est de la forme : $A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t) + K\mathrm{e}^{-5t}$

Comme $\mathrm{e}^{-5t} \to 0$ très vite, le morceau en $K\mathrm{e}^{-5t}$ va vite disparaître et on ne le verrait pas sur un oscilloscope, à moins de disposer d'un oscilloscope à mémoire permettant de « photographier » ce qui se passe au tout début.

On va donc poser $s = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, soit $s' = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$. En remplaçant :

$$e = 5s' + s \Rightarrow 5\omega\, B + A = E \text{ et } -5\omega\, A + B = 0 \Rightarrow A = \frac{E}{25\omega^2 + 1} \text{ et } B = \frac{5\omega\, E}{25\omega^2 + 1}$$

Ensuite il faut faire de la trigonométrie pour voir :

$$s = \frac{E}{25\omega^2+1}\cos(\omega\, t) + \frac{5\omega\, E}{25\omega^2+1}\sin(\omega\, t) = \frac{E}{\sqrt{25\omega^2+1}}\cos\left(\omega\, t - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{25\omega^2+1}}\right)\right)$$

Pas simple... On voit que le gain est $G = \frac{S}{E} = \frac{1}{\sqrt{25\omega^2+1}}$ et la phase $\varphi = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{25\omega^2+1}}\right)$.

C'est faisable mais le fait que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ crée des difficultés.

2.2 Même travail en complexes

D'abord, les électriciens utilisent j au lieu de i pour le nombre tel que $j^2 = -1$

Prenons $e = E\,\mathrm{e}^{j\omega\, t}$ et toujours $e = 5s' + s$.
Cette fois, la forme de la solution est $s = A\,\mathrm{e}^{j\omega\, t}$ avec $A \in \mathbb{C}$. Cette forme est déjà plus simple.

On remplace dans l'équation, avec $s' = j\omega\, A\,\mathrm{e}^{j\omega\, t}$ (ce qui est plus simple aussi) :

$$e = 5s' + s \Rightarrow E\,\mathrm{e}^{j\omega\, t} = 5j\omega\, A\,\mathrm{e}^{j\omega\, t} + A\,\mathrm{e}^{j\omega\, t} \Rightarrow A = \frac{E}{5\omega\, j+1}$$

On a donc $e = E\mathrm{e}^{j\omega\, t} \mapsto s = \frac{E}{5\omega\, j+1}\mathrm{e}^{j\omega\, t}$. Il s'agit d'une simple multiplication par $\frac{1}{5\omega\, j+1}$.
Il s'agit d'un nombre complexe qui possède un module et une phase.
On peut voir qu'avec $G = \left|\frac{1}{5\omega j+1}\right|$ et $\varphi = \arg\left(\frac{1}{5\omega j+1}\right)$ on retrouve les mêmes résultats que dans le cas précédent.

Les calculs sont plus simples. Le bénéfice vient du fait que dériver $\mathrm{e}^{j\omega t}$ revient à multiplier par $j\omega$, et alors la dérivation devient une opération simple.

2.3 Lien cosinus, sinus et complexes

On utilise la forme d'Euler $\mathrm{e}^{j\theta}$:

$$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{-j\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta}-\mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}$$

Puisque Fourier nous dit que l'on peut décomposer un signal en somme de $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$, avec ces formules, on voit que l'on pourra décomposer aussi en somme de $\mathrm{e}^{jn\omega t}$ et $\mathrm{e}^{-jn\omega t}$, c'est à dire en une somme de $\mathrm{e}^{jn\omega t}$ avec n pouvant être négatif.

3 Série de Fourier avec les complexes

3.1 La série

Partant d'une fonction f de période T, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on a vu :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

En complexe, on écrira simplement :

$$f(t) = \sum_n c_n\mathrm{e}^{jn\omega t}$$

C'est plus simple, il n'y a plus de distinction entre a_0, a_n et b_n, il n'y a que des c_n. En revanche, c_n est complexe et n peut être négatif. Comme au départ $f(t)$ est un signal réel, on est certain que $c_{-n} = \overline{c_n}$ (la barre au-dessus sert à désigner le complexe conjugué), de sorte que le terme en c_n plus le terme en c_{-n} donnent tous les deux une valeur réelle.

3.2 Le calcul des coefficients

On avait trois formules :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{d}t \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\ \cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\ \sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

En complexes, une seule suffit :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\ \mathrm{e}^{-jn\omega t}$$

Et il n'est pas nécessaire de calculer les termes avec $n < 0$ puisque l'on sait que $c_{-n} = \overline{c_n}$. Par exemple, si on connaît c_2, on en déduit tout de suite c_{-2} sans avoir besoin de refaire le calcul.

On peut voir que pour $n \geqslant 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = j\,c_n - j\,c_{-n}$, ou à l'envers, $c_n = \frac{a_n - j\,b_n}{2}$. On a aussi $c_0 = a_0$.

3.3 Parseval

$$\overline{f^2} = a_0^2 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_n |c_n|^2$$

Là encore, c'est plus simple.

3.4 Spectre

Avec la décomposition réelle, le spectre est la série de valeurs :

$$A_0 = |a_0| \quad ; \quad n \geqslant 1, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

En décomposition complexe, le spectre s'étend du côté $n < 0$ et est composé de la série de valeurs :

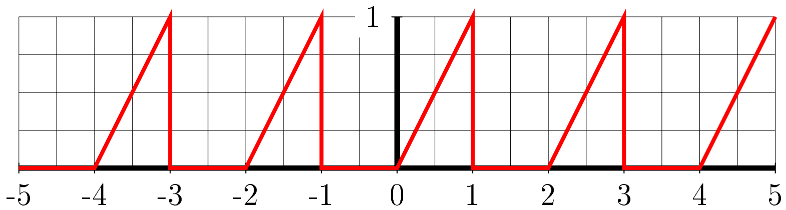
$$C_n = |c_n|$$

On peut trouver bizarre l'idée d'harmoniques avec $n\omega < 0$, c'est à dire une période négative. Pourtant, cela correspond à une certaine réalité et permet de mieux comprendre pourquoi, par exemple, quand on numérise de la musique et qu'on veut laisser passer les sons jusqu à 20kHz, il faut faire l'échantillonnage à 40kHz (44kHz pour les CDs).

De toutes façons, ce spectre complexe est pair car $|c_{-n}| = |c_n|$.

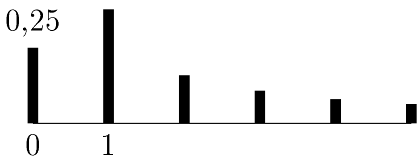
4 Exemple

Prenons $f(t)$ de période 2, avec $f(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 \text{ si } \ -1 \leqslant t < 0 \end{cases}$



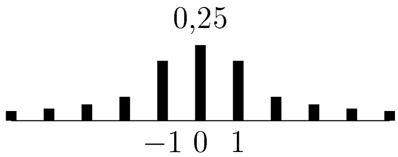
En réels :

$$a_0 = \frac{1}{4} \quad ; \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \quad ; \quad b_n = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$$



En complexes :

$$c_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2} + j\frac{(-1)^n}{2n\pi} \quad ; \quad c_0 = \frac{1}{4}$$



On peut voir qu'à droite le spectre est symétrique. Si on ajoute les raies pour -1 et 1, on obtient la même raie qu'à gauche pour 1.

Il faut remarquer aussi que les formules compliquées que j'ai données pour a_n, b_n, c_n n'ont pas grand intérêt. Il est surtout utile de connaître l'étendue du spectre. Ici, la période est de $T = 2\,ms$, alors la fréquence est $\frac{1}{T} = 500\,Hz$.

Si on regarde le spectre, on constate qu'il reste des raies non négligeables jusqu'à $n = 30$. L'encombrement spectral va donc jusqu'à 15 kHz.

5 Fourier, filtrage

5.1 Fonction de transfert

Reprenons l'exemple : $e = \tau s' + s$ Si on remplace e et s par leurs expression en série :

$$e = \sum_n e_n \mathrm{e}^{jn\omega t} \text{ et } s = \sum_n s_n \mathrm{e}^{jn\omega t} \Rightarrow s' = \sum_n jn\omega\, s_n e^{jn\omega t}$$

On peut regrouper et constater que :

$$e_n = (\tau \cdot jn\omega + 1)s_n \Rightarrow \frac{s_n}{e_n} = h_n = \frac{1}{j\tau n\omega + 1}$$

Le coefficient complexe $h_n = \frac{1}{j\tau n\omega+1}$ indique comment l'harmonique n est transformée. On sait qu'elle subit un déphasage de $\varphi = \arg(h_n)$ et voit son amplitude multipliée par $G_n = |h_n|$. On ne va pas s'intéresser ici au déphasage, seulement au gain $G_n = |h_n| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega_n^2}}$.

J'ai noté $\omega_n = n\omega$ ce qui permet une approche plus générale.

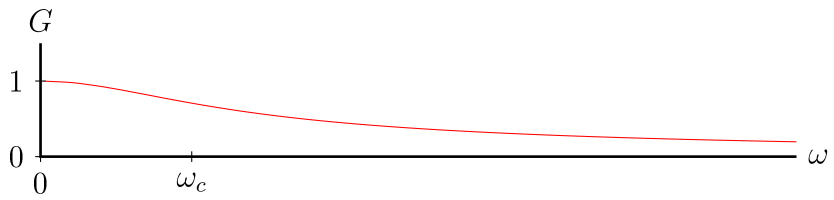
- Pour $\tau\omega_n \ll 1 \Leftrightarrow \omega_n \ll \omega_c = \frac{1}{\tau}$, on peut dire $G_n \simeq 1 \Rightarrow s_n = e_n$
  Autrement dit, quand $\omega_n \ll \omega_c$, l'harmonique passe sans être transformée par le filtre.
- Pour $\tau\omega_n \gg 1 \Leftrightarrow \omega_n \gg \omega_c$, on peut dire $G_n \simeq \frac{1}{\tau\omega_n} \to 0 \Rightarrow s_n \to 0$
  Autrement dit, quand $\omega_n \gg \omega_c$, l'harmonique ne passe pas.

On a donc un **filtre passe-bas**, il laisse passer les faible ω mais pas les grands. ω_c est la pulsation de coupure. Elle fait la frontière entre ce qui passe et ce qui ne passe pas. Bien sûr, il ne s'agit pas ici d'une coupure nette. ω_c est là pour fixer un ordre de grandeur.

Par exemple, si on coupe à $40\,kHz$, alors les harmoniques à $10\,kHz$ passent sans problème. Une harmonique à $40\,kHz$ passe mais elle est notablement diminuée. Une harmonique à $100\,kHz$ est très amoindrie.

5.2 Diagramme de Bode

On peut représenter la fonction $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$.



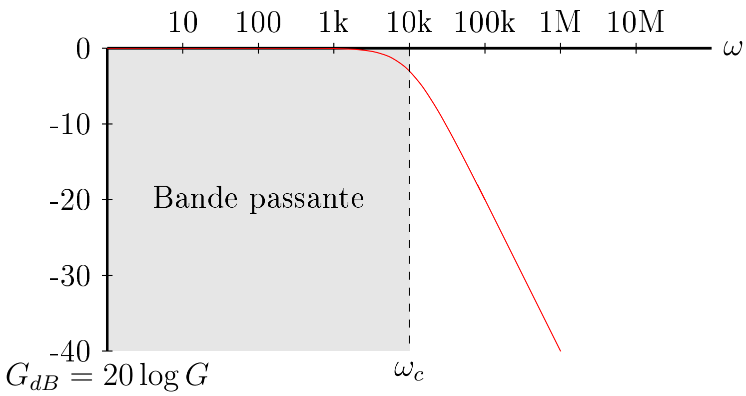
Une telle courbe est peu parlante. On préfère la représenter dans un graphique log / log :

- l'axe horizontal place les décades avec un intervalle constant, ce qui revient à graduer en $\log \omega$,
- sur l'axe vertical, on représente $G_{dB} = 20 \log G$.

  Pourquoi 20 ?

  – le dB = décibel, est une unité liée à la puissance. Elle mesurera ici le gain de puissance : $\frac{S^2}{E^2} = G^2$,
  – on utilise le **déci**bel et pas le bel, d'où un facteur 10,
  – les décibels forment une échelle logarithmique : gagner $10\,dB$ c'est multiplier la puissance par 10, gagner $20\,dB$ c'est multiplier la puissance par 100.

  Au final $G_{bel} = \log G^2 \Rightarrow G_{dB} = 10 \log G^2 = 20 \log G$.



Ainsi présenté, le moment de la coupure est beaucoup plus net.

Un gain de $0dB$ correspond à une multiplication par 1 (car $\log(1) = 0$. Au moment de la coupure, le gain est de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB$. On parle donc de coupure à $-3\,dB$.

Dans cet exemple, on comprend que les parties du spectre au-delà de $10k$ seront filtrées : Elles ne passeront pas. Le terme de **filtre** vient de là.