Décomposition en série de Fourier

s un signal périodique

- s a un période $T \Leftrightarrow s(t+T) = s(t)$.
  Autrement dit, la courbe de s présente un motif de longueur T qui se répète.
- La fréquence est $f = \dfrac{1}{T}$
- La pulsation est ω telle que $T \cdot \omega = 2\pi$.

Pour f de période T on définit la série :

$$S_f : \quad t \mapsto a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_0 = f_{MOY} = \overline{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{pour } n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

Convergence : Critères de Dirichlet
La série S_f converge vers f si

- la dérivée f' est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de discontinuité par période,
- f et f' restent bornés [*ne tendent pas vers* ∞]

Si f a une discontinuité [*un trou*] en t_0, alors :

$$S_f(t_0) = \frac{\lim_{t \to t_0^-} f(t) + \lim_{t \to t_0^+} f(t)}{2}$$

autrement dit $S_f(t_0) \to$ la milieu du trou.

f **paire :** alors $b_n = 0$ et on peut simplifier :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

f **impaire :** alors $a_0 = a_n = 0$ et on peut simplifier :

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Les termes de rang n constituent l'**harmonique** de rang n.
- Les musiciens appellent **fondamental** l'harmonique de rang $n = 1$.
- $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ avec $A_n \geqslant 0$, et $A_0 = a_0$.

On appelle **puissance** la quantité : $\quad P = \overline{f^2} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T f(t)^2 \mathrm{d}t = U_{EFF}^2$

Théorème de Parseval $\quad P = a_0^2 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n^2 + b_n^2 = A_0^2 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} A_n^2$