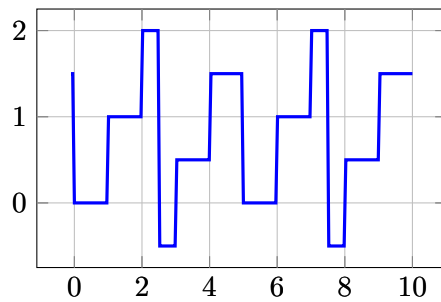
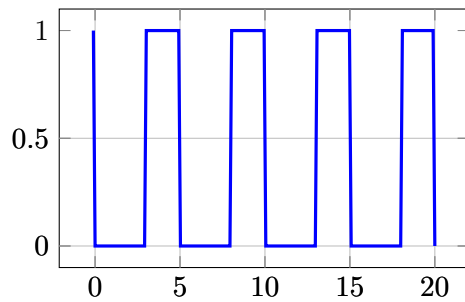
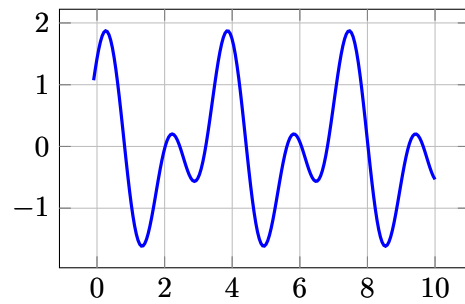
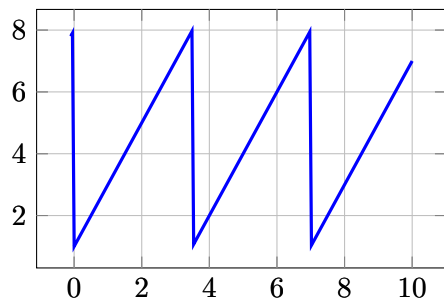


Exo 1 période et pulsation

Pour les signaux suivants, donnez T et ω .

**Exo 2** Dans les cas suivant, on vous demande de tracer deux périodes du signal s .

(a) s pair et de période 4 et :

$$s(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

(b) s de période 3 et :

$$s(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t & \text{si } 1 < t < 3 \end{cases}$$

(c) s de période 2π et sur $[0; 2\pi]$,
 $s(t) = t(2\pi - t)$

Exo 3 Tracer les courbes correspondantes.

(a) $S(t) = 0,637 \sin(\pi t) - 0,318 \sin(2\pi t) + 0,212 \sin(3\pi t) - 0,159 \sin(4\pi t)$

(b) $S(t) = 0,25 - 0,405 \cos(\pi t) + 0,203 \cos(2\pi t) + 0,045 \cos(3\pi t) + 0,016 \cos(5\pi t) + 0,023 \cos(6\pi t)$

Exo 4 Donnez les primitives

(a) $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$

(b) $f(t) = \cos(t)$

(c) $f(t) = \sin(t)$

(d) $f(t) = 4 \sin(10t)$

(e) $f(t) = 4 \cos(n\omega t)$

Exo 5 Intégrales

(a) $\int_0^2 t dt$

(b) $\int_0^2 (5t^2 + t + 2) dt$

(c) $\int_0^\pi \sin(t) dt$

(d) $\int_0^\pi 4 \cos(t) dt$

(e) $\int_0^\pi 9 \cos(n t) dt$

Exo 6 Coefficients de Fourier

Calculez a_n et b_n dans les cas suivants :

- (a) période $T = 2$, f impaire, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t < 1$
 (b) période $T = 3$, $f(t) = 1$ pour $0 \leq t < 1$ et 0 sinon.
 (c) période $T = 1$, $f(t) = t$ sur $[0; 1[$.

On pourra utiliser le résultat suivant obtenu avec un logiciel de calcul formel :

$\begin{aligned} & \text{integrate}(t \cos(n \omega t), t, 0, T) \\ &= -\frac{1}{n^2 \omega^2} + \frac{\cos(T n \omega) + T n \omega \sin(T n \omega)}{n^2 \omega^2} \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \text{integrate}(t \sin(n \omega t), t, 0, T) \\ &= \frac{\sin(T n \omega) - T n \omega \cos(T n \omega)}{n^2 \omega^2} \end{aligned}$

Exo 7 Convergence

Précisez s'il y a convergence $S_f \rightarrow f$ et s'il des t pour lesquels $S_f(t) \neq f(t)$.

- (a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$, de période $T = 2$
 (b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$, paire et période $T = 4$
 (c) $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$
 (d) $f(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

Exo 8 Pair et impair

Calculez les coefficients a_n et b_n dans les cas suivants :

- (a) f impaire, de période $T = 6$ avec $f(t) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0,5 & \text{si } 2 < t < 3 \end{cases}$,
 (b) f paire et de période $T = 2$ avec $f(t) = \begin{cases} 1 - 2t & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$.

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t) \cos(n\pi t) dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} - \frac{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi^2}$$

Exo 9 Puissance

Calculer P dans les cas suivants :

- (a) $u(t) = 12$ $T = 4$
 (b) $u(t) = K$ (e) $u(t) = A \sin(\omega t)$
 (c) $u(t) = t$ sur $[0; 2]$ et période $T = 2$ (f) $u(t) = A \cos(\omega t)$
 (d) $u(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$, paire et période (g) $u(t) = t \cdot (1 - t)$ sur $[0; 1[$ et de période $T = 1$

Exo 10 Parseval

f paire, de période $T = 2$ et sur $[0; 1]$, $f(t) = 1 - t$.

- (a) Justifier que les coefficients b_n sont nuls.
 (b) Montrer que $a_0 = \frac{1}{2}$.
 (c) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

$$\frac{\int_0^1 (1-t) \cos(n\omega t) dt}{n^2 \omega^2} + \frac{-2 \cos\left(\frac{T n \omega}{2}\right) + 2 n \omega \sin\left(\frac{T n \omega}{2}\right) - T n \omega \sin\left(\frac{T n \omega}{2}\right)}{2 n^2 \omega^2}$$

En déduire que $a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)$

- (d) Calculer $P = \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_T f(t)^2 dt$
 (e) Soit $S_N(t) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \cos(n \pi t)$ une série de Fourier incomplète.

Déterminer la valeur de N pour laquelle la puissance de S_N atteint 99,9 % de P ?

Exo 11

Vérifiez que les deux signaux dont les décompositions sont données ci-dessous, ont bien le même spectre.

n	a_n	b_n
0	0	/
1	0	1,27
2	0	0
3	0	0,42
4	0	0
5	0	0,25
6	0	0

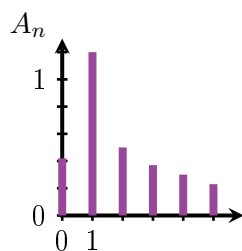
n	a_n	b_n
0	0	/
1	-0,64	1,10
2	0	0
3	-0,42	0
4	0	0
5	0,13	-0,22
6	0	0

Exo 12 Soit la fonction f de période $T = 2\pi$

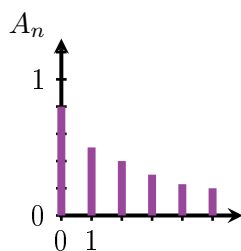
f développable en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right]$$

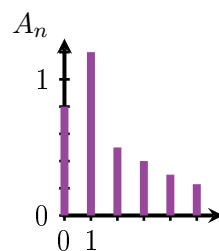
Indiquez le spectre correspondant.



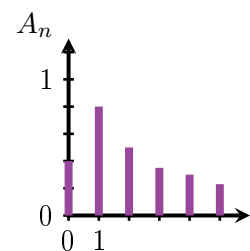
(a)



(b)



(c)



(d)