# 05. Séries

Simple présentation, inutile de copier

Le but de ce cours est de présenter ce qu'est une série.

Il ne s'agit pas d'apprendre de nouvelles techniques de calculs. Il s'agit d'une préparation à ce que seront les séries de Fourier.

# I. Définition

Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
La série $(S_n)$ est elle-même une suite définie ainsi :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On s'intéresse en particulier à l'existence d'une limite :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Quand cette limite existe, on dit que la **série converge**.

# Exercice : cas d'une suite arithmétique

Soit $u$ de premier terme 1, arithmétique, de raison $r = 0,5$.

1. Donnez l'expression de $u_n$.
2. Donnez l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
3. La série converge-t-elle ? Si oui que vaut $S$ ?

# Exercice : cas d'une suite géométrique

Soit $u$ de premier terme 100, géométrique, de raison $q = 0,9$.

1. Donnez l'expression de $u_n$.
2. Donnez l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
3. La série converge-t-elle ? Si oui, que vaut $S$ ?

# Exercice : en relation avec exponentielle

Soit $u$ la suite d'expression $u_n = \dfrac{1}{n!}$.
**Rappel :** $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
On convient que $0! = 1$.

1. Calculez $S_5$, $S_{10}$, $S_{15}$, $S_{20}$ avec une machine.
2. La série semble-t-elle converger ?

*Remarque :* La machine a rapidement des difficultés à calculer $n!$ pour $n$ assez grand. Par exemple 100! provoque une erreur sur une calculatrice.

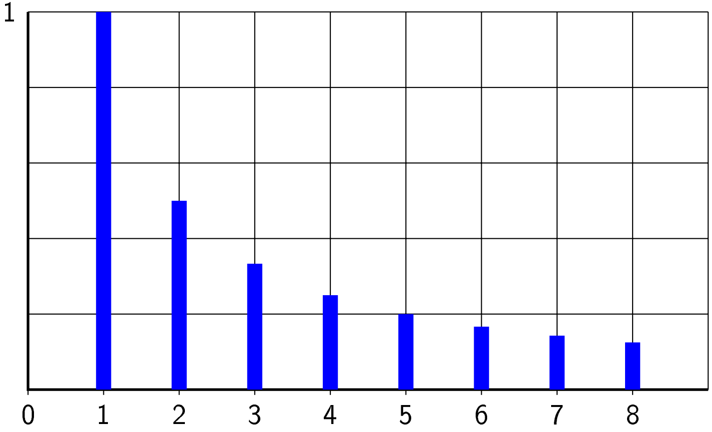
# II. Série de Riemann

# Exercice : série harmonique

Soit $u$ la suite d'expression $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$.

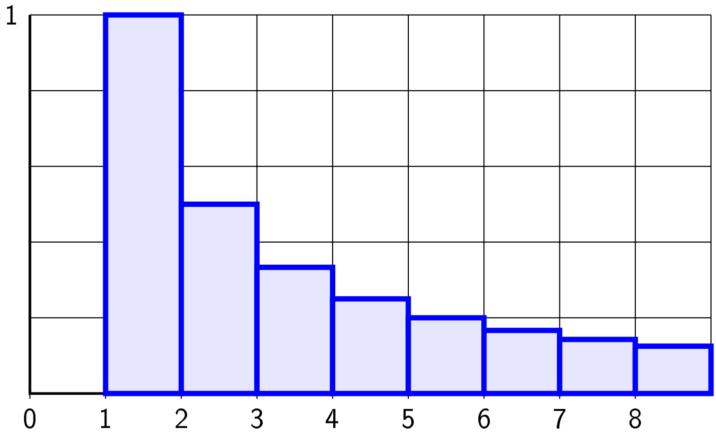
1. Calculez $S_{10}$, $S_{100}$, $S_{1000}$ avec une machine.
2. La série semble-t-elle ?

# Démonstration



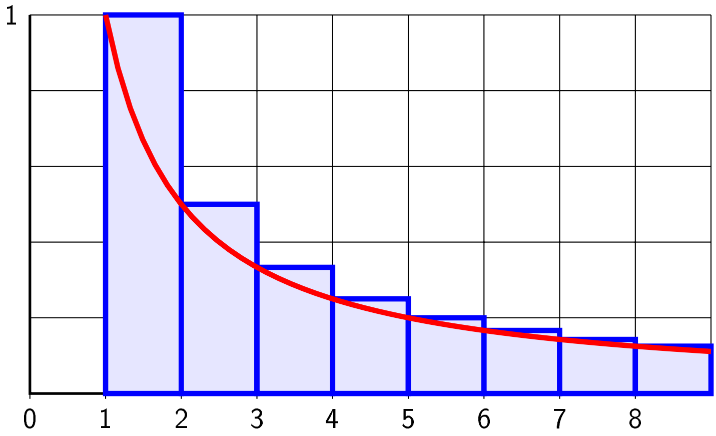

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k}$$

# Démonstration



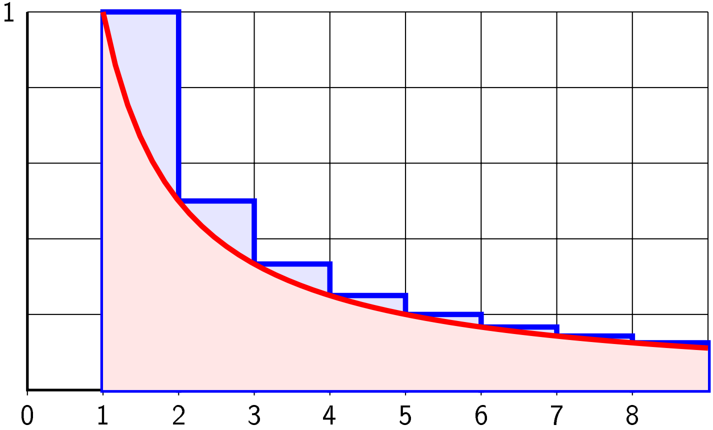

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \mathcal{A}$$

# Démonstration



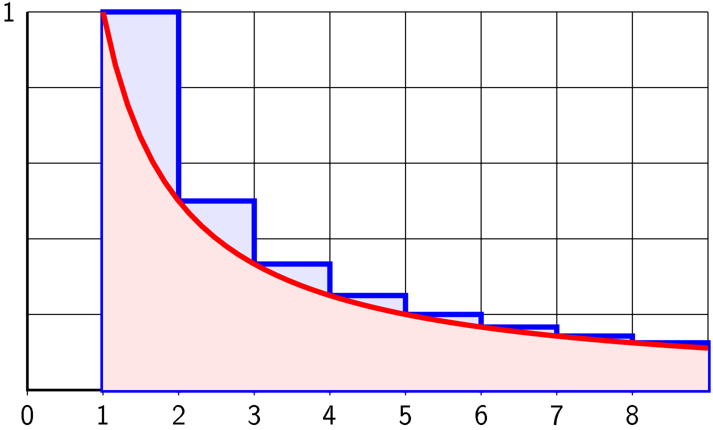

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \mathcal{A}$$

# Démonstration



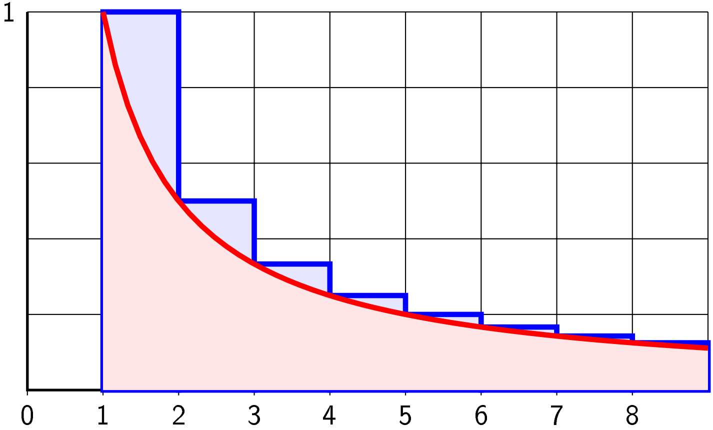

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \mathcal{A} > \mathcal{A}$$

# Démonstration




$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \color{blue}{\mathcal{A}} > \color{red}{\mathcal{A}} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1)$$

# Démonstration




$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \mathcal{A} > \mathcal{A} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1)$$

# Conclusion

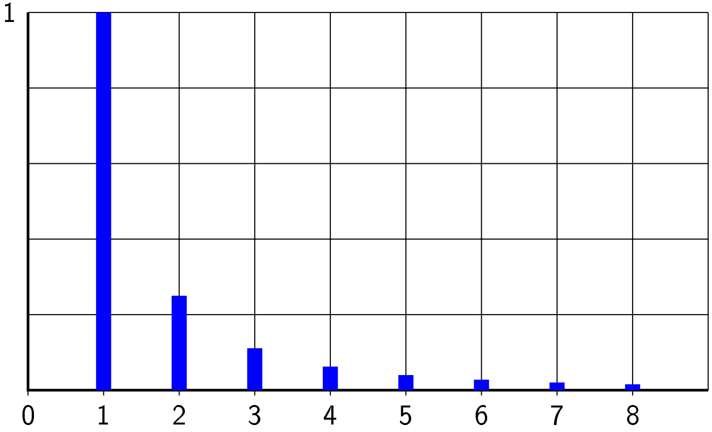
La série est plus grande qu'une quantité qui diverge vers l'infini
$\Rightarrow S_n \to +\infty$ et la série est divergente.

Cela peut paraître surprenant car cette série augmente très lentement (comme la fonction ln d'ailleurs)

# Exercice

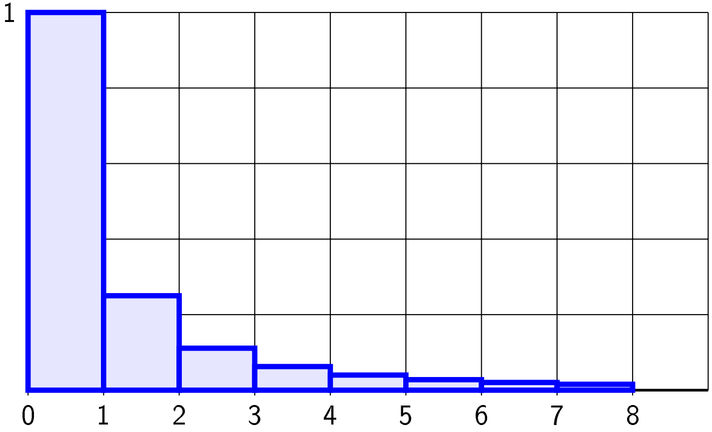
Soit $u$ la suite d'expression $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n > 0$.

1. Calculez $S_{10}$, $S_{100}$, $S_{1000}$ avec une machine.
2. La série semble-t-elle ?



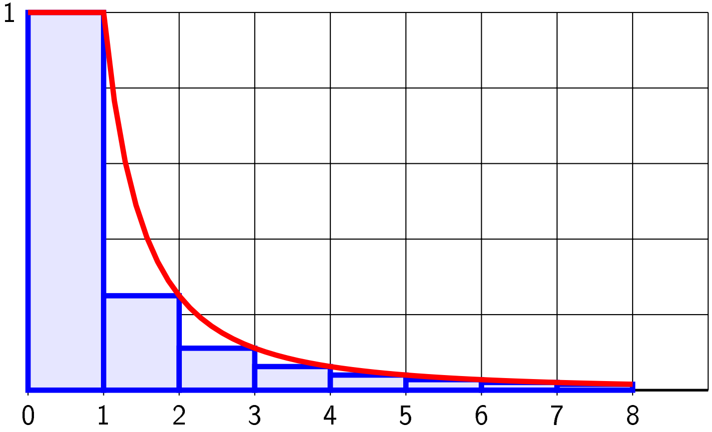

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k^2}$$

# Démonstration



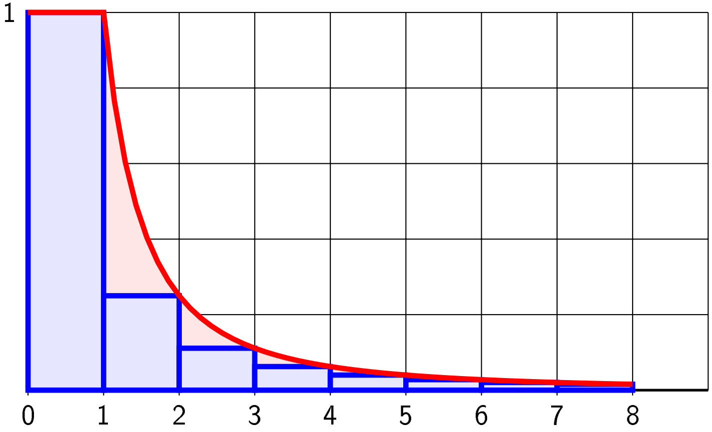

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k^2} = \mathcal{A}$$

# Démonstration



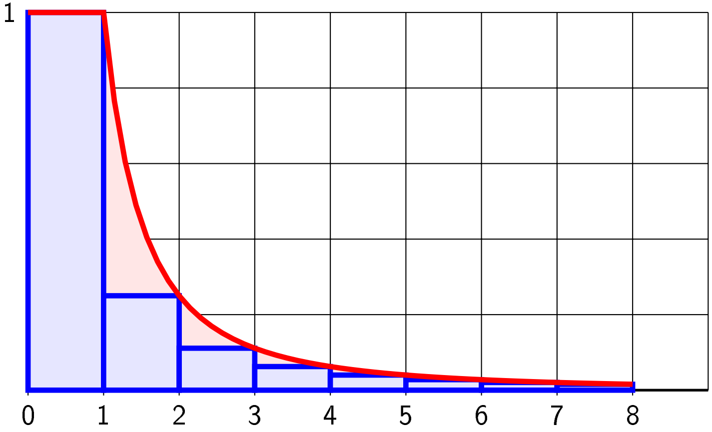

$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k^2} = \mathcal{A}$$

# Démonstration




$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k^2} = {\color{blue}\mathcal{A}} < {\color{red}\mathcal{A}}$$

# Démonstration




$$S_n = \sum_{0<k\leqslant n} \frac{1}{k^2} = {\color{blue}\mathcal{A}} < {\color{red}\mathcal{A}} = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

# Conclusion

La série $S_n$ ne fait que croître, sans jamais dépasser 2.

On peut conclure que $S_n$ converge vers une quantité inférieur à 2.

On peut prouver que

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Le résultat est joli mais n'a pas grande importance pour nous. Cette série sert juste d'exemple.