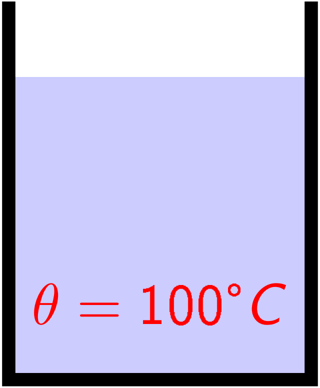
Équations différentielles

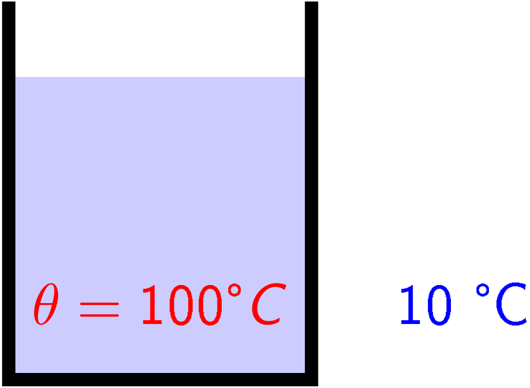
Vous disposez d'une fiche. Ne pas recopier.

I. Premier ordre

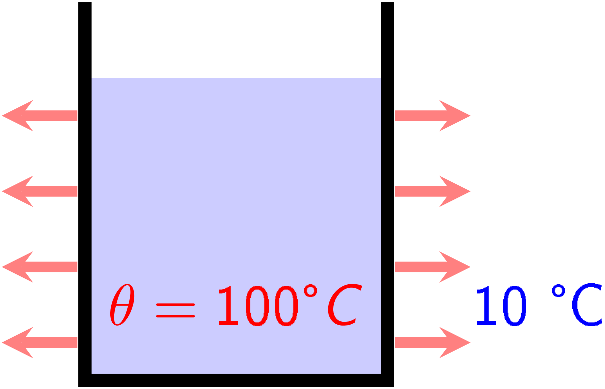
Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.



Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.

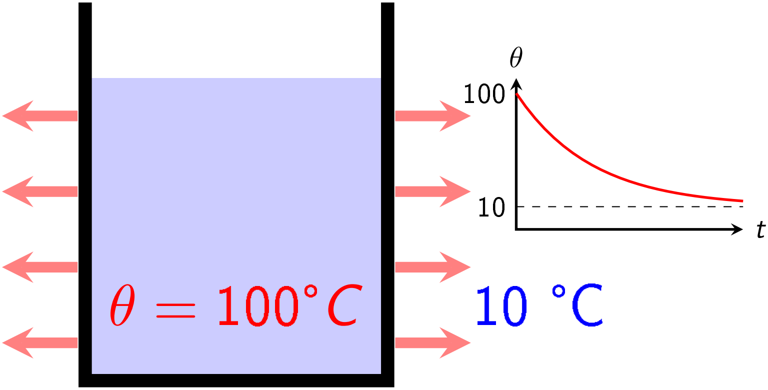


Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.

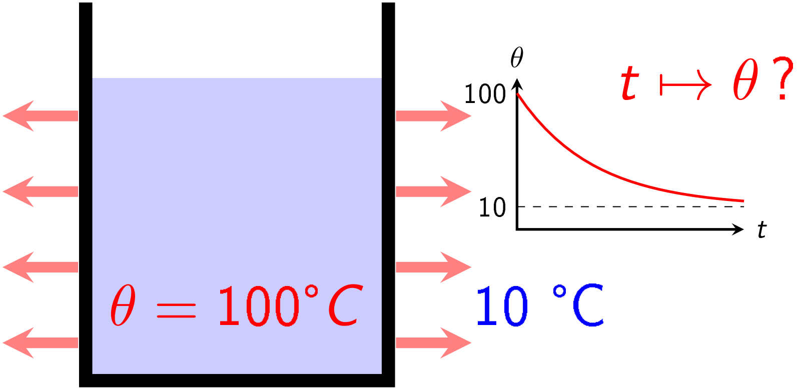


I. 1) Expérience

Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.
La température θ va baisser jusqu'à $10°C$.



Un verre contient de l'eau à $\theta = 100°C$.
L'air ambiant est à $10°C$.
On s'attend à ce que la chaleur sorte du verre.
La température θ va baisser jusqu'à $10°C$.



Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \overset{t \rightsquigarrow t+dt}{\longrightarrow} \theta + d\theta$$

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \leadsto t+dt} \theta + d\theta$$

En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,

I. 2) Modélisation

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \xrightarrow{t \rightsquigarrow t+dt} \theta + d\theta$$

En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,
- la différence $\theta - 10$
  ie : Plus est grand l'écart de température entre l'eau et l'air ambiant, plus l'échange d'énergie est grand.

I. 2) Modélisation

Supposons connu θ **maintenant**.
Comment va changer θ dans **les prochaines secondes** ?

$$\theta \overset{t \rightsquigarrow t+dt}{\longrightarrow} \theta + d\theta$$

En première approximation $d\theta \propto$:

- le temps dt,
- la différence $\theta - 10$
  ie : Plus est grand l'écart de température entre l'eau et l'air ambiant, plus l'échange d'énergie est grand.

On va supposer :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

- Signe $-$ car on s'attend à $\theta \searrow$,
- $0,05$ est le facteur proportionnalité qui dépend sûrement de la matière du verre, son épaisseur, sa forme... et aussi des unités choisies !
  $0,05$ est un exemple.

De la modélisation :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

I. 3) Équation différentielle

De la modélisation :

$$d\theta = -0,05 \cdot dt \cdot (\theta - 10)$$

On déduit :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

C'est une **équation différentielle** : une équation dont

- l'inconnue est une fonction θ
- l'inconnue apparaît avec ses dérivées θ', θ''...

Le physicien ne note pas la dépendance en temps $\theta(t)$.
Il sait que θ dépend de t mais ne l'écrit pas pour alléger.

I. 4) Exploitation du modèle

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?

Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?

Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

I. 4) Exploitation du modèle

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?
Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

Revient à faire comme si θ' était constant pendant le temps dt, comme pour une fonction affine, c'est à dire une fonction du premier ordre. C'est pour cela qu'on parle d'ordre 1.

I. 4) Exploitation du modèle

On sait que $\theta(0) = 100$ et que (E) : $\theta' = -0,05 \cdot (\theta - 10)$. Comment prévoir l'évolution de θ ?

Procédure :

- Connaissant θ, avec (E) j'en déduis θ'
- Je me fixe un dt petit, et je calcule $d\theta = \theta' \cdot dt$

Revient à faire comme si θ' était constant pendant le temps dt, comme pour une fonction affine, c'est à dire une fonction du premier ordre. C'est pour cela qu'on parle d'ordre 1.

- Je calcule la nouvelle valeur $\theta + d\theta$

I. 4) Exploitation du modèle

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0
θ	100
θ'	
$d\theta$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0
θ	100
θ'	$\overset{(E)\downarrow}{-4,50}$
$d\theta$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$
θ	100	
	$(E)\downarrow$	
θ'	$-4,50$	
	$dt \cdot \theta' \downarrow$	
$d\theta$	$-0,45$	

I. 4) Exploitation du modèle

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$
θ	$100 \longrightarrow$	$99,55$
	$(E)\downarrow$	
θ'	$-4,50$	
	$dt \cdot \theta' \downarrow$	
$d\theta$	$-0,45$	

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	0	$0,1$	$0,2$
θ	100	$99,55$	$99,10$
θ'	$-4,50$	$-4,48$	
$d\theta$	$-0,45$	$-0,45$	

dt

(E)

$dt \cdot \theta'$

I. 4) Exploitation du modèle

$$(E)\ :\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = -0,05 \cdot (\theta - 10)$$

t	$0 \xrightarrow{dt}$	$0,1$	$0,2$	$0,2$
θ	$100 \longrightarrow$	$99,55$	$99,10$	$98,67$
θ'	$\overset{(E)\downarrow}{-4,50}$	$-4,48$	$-4,46$	$\cdots$
$d\theta$	$\overset{dt\cdot\theta'\downarrow}{-0,45}$	$-0,45$	$-0,45$	

Exercice : Avec le mode suite

Soit $\theta_n = \theta(n\, dt)$ avec $dt = 0,1$.

1. Que vaut θ_0 ?
2. Donnez la relation de récurrence, θ_{n+1} en fonction de θ_n.
3. Avec une calculette, affichez le tableau de valeur et cherchez pour quel n, θ_n passe en dessous de 11.
4. Déduisez-en le temps nécessaire pour que le verre refroidisse à $30°C$.

Exercice : Avec le mode suite

Soit $\theta_n = \theta(n\,dt)$ avec $dt = 0,1$.

1. Que vaut θ_0 ?
2. Donnez la relation de récurrence, θ_{n+1} en fonction de θ_n.
3. Avec une calculette, affichez le tableau de valeur et cherchez pour quel n, θ_n passe en dessous de 11.
4. Déduisez-en le temps nécessaire pour que le verre refroidisse à $30^\circ C$.

Correction

$$\theta_0 = 100 \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \theta_n - 0,1 \times 0,05(\theta_n - 10) = 0,995\theta_n + 0,05$$

$\theta_{300} \simeq 30,006$ et $\theta_{301} \simeq 29,906$. C'est donc pour $n = 301$, soit au bout de $30,1$ unités de temps (pas précisées...)

Le passage $\dfrac{d\theta}{dt} \to \theta'$ est juste dans la limite où $dt \to 0$. Notre calcul avec $dt = 0,1$ est donc approximatif.

On peut améliorer l'approximation en réduisant dt, mais cela augmente le temps de calcul.

Dans des cas **assez simples**, on peut trouver une expression théorique exacte de $\theta(t)$.

I. 5) Résolution de (E) : $\theta' = -0,05(\theta - 10)$; $\theta(0) = 100$

La méthode classique de résolution consiste à suivre ces étapes :

1. Résoudre (E_0) : $\theta' = -0,05\,\theta$

L'équation E_0 est celle que l'on obtient quand on enlève les termes qui n'ont pas de facteur θ ou θ'

I. 5) Résolution de (E) : $\theta' = -0,05(\theta - 10)$; $\theta(0) = 100$

La méthode classique de résolution consiste à suivre ces étapes :

1. Résoudre (E_0) : $\theta' = -0,05\,\theta$

L'équation E_0 est celle que l'on obtient quand on enlève les termes qui n'ont pas de facteur θ ou θ'

En général $y' = a \cdot y \Rightarrow y = K e^{a \cdot t}$

donc : $\theta_{E0} = K e^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$

- θ_{E0} **n'est pas la solution** de (E) !
- $K \in \mathbb{R}$ signifie que l'on peut choisir K comme on veut, toutes les valeurs sont valables. À ce stade, on n'a aucune raison d'en prendre une plutôt qu'une autre.

I. 5) Résolution de $(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10)$; $\theta(0) = 100$

La méthode classique de résolution consiste à suivre ces étapes :

1. Résoudre $(E_0) : \theta' = -0,05\,\theta$

En général $y' = a \cdot y \Rightarrow y = Ke^{a \cdot t}$

donc : $\theta_{E0} = Ke^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$

2. Chercher une solution particulière de (E)

Dans un devoir on donnerait la réponse à vérifier.

On propose $\theta_1 = 10$, alors $\theta_1' = 0$ et on a bien $(E) : 0 = -0,05(10 - 10)$.

I. 5) Résolution de $(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10)$; $\theta(0) = 100$

La méthode classique de résolution consiste à suivre ces étapes :

1. Résoudre $(E_0) : \theta' = -0,05\,\theta$

En général $y' = a \cdot y \Rightarrow y = Ke^{a \cdot t}$

   donc : $\theta_{E0} = Ke^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$

2. Chercher une solution particulière de (E)
   On propose $\theta_1 = 10$, alors $\theta_1' = 0$ et on a bien
   $(E) : 0 = -0,05(10 - 10)$.
3. Donner une solution générale de (E)

Sol g^{ale} de (E) = Sol g^{ale} de (E_0) + Sol particulière de (E)

   Donc $\theta = Ke^{-0,05t} + 10, K \in \mathbb{R}$

I. 5) Résolution de (E) : $\theta' = -0,05(\theta - 10)$; $\theta(0) = 100$

La méthode classique de résolution consiste à suivre ces étapes :

1. Résoudre (E_0) : $\theta' = -0,05\,\theta$

En général $y' = a \cdot y \Rightarrow y = Ke^{a \cdot t}$

donc : $\theta_{E0} = Ke^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$

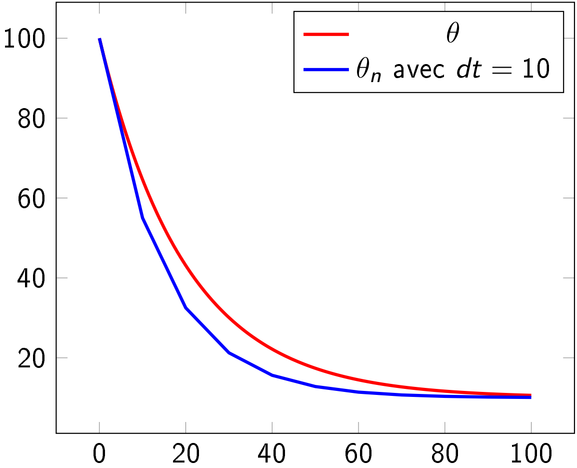
2. Chercher une solution particulière de (E)
   On propose $\theta_1 = 10$, alors $\theta_1' = 0$ et on a bien
   (E) : $0 = -0,05(10 - 10)$.
3. Donner une solution générale de (E)

Sol g^{ale} de (E) = Sol g^{ale} de (E_0) + Sol particulière de (E)

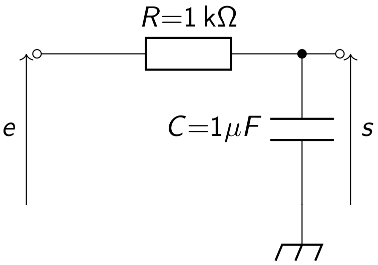
Donc $\theta = Ke^{-0,05t} + 10, K \in \mathbb{R}$

4. Donner la solution de (E) répondant au problème – *choisir K*
   $\theta(0) = Ke^{-0,05 \times 0} + 10 = K + 10$ et $\theta(0) = 100$
   Donc $K + 10 = 100 \Rightarrow K = 90 \Rightarrow \theta = 90e^{-0,05t} + 10$

Comparaisons simulation (Euler) et résolution

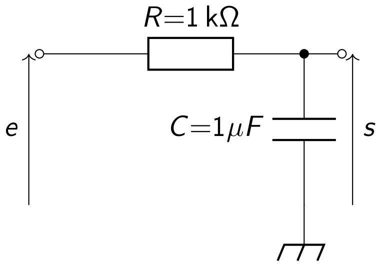


Deuxième exemple : charge d'un condensateur



$s(0) = 0$
On donnera $e(t)$ ensuite.
On peut prouver que :

$$e = RCs' + s$$
$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{1000}s' + s$$



$s(0) = 0$
On donnera $e(t)$ ensuite.
On peut prouver que :

$$e = RCs' + s$$
$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{1000}s' + s$$

Équation sans second membre $\Rightarrow s_0 = K\, e^{-1000\, t}$

Supposons $e(t) = 5$...

Supposons $e(t) = 5$...

$$s_1 = 5 \Rightarrow s(t) = 5 + K\, e^{-1000\, t}$$

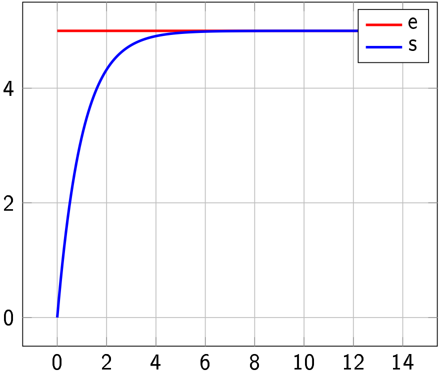
Tenant compte de $s(0) = 0$...

Supposons $e(t) = 5$...

$$s_1 = 5 \Rightarrow s(t) = 5 + K\, e^{-1000\, t}$$

Tenant compte de $s(0) = 0$...

$$s(t) = 5 - 5\, e^{-1000t}$$



Supposons $e(t) = 5\sin(1000t)$... *Beaucoup plus difficile...*

Supposons $e(t) = 5\sin(1000t)$... *Beaucoup plus difficile...*

$$s_1 = \frac{5}{2}\sin(1000t) - \frac{5}{2}\cos(1000t)$$

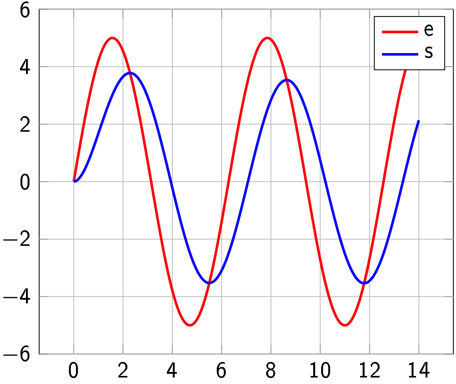
$$s = \frac{5}{2}\sin(1000t) - \frac{5}{2}\cos(1000t) + K\,e^{-1000\,t}$$

Supposons $e(t) = 5\sin(1000t)$... *Beaucoup plus difficile...*

$$s_1 = \frac{5}{2}\sin(1000t) - \frac{5}{2}\cos(1000t)$$

$$s = \frac{5}{2}\sin(1000t) - \frac{5}{2}\cos(1000t) + K\,e^{-1000\,t}$$

Avec $s(0) = 0 \Rightarrow s = \frac{5}{2}\sin(1000t) - \frac{5}{2}\cos(1000t) + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1000t}$



Remarque

Le cas précédent est pénible à cause des fonctions trigonométriques à manipuler. On passe en général par des techniques de calcul plus efficaces :

- Utiliser les complexes ce qui évite les manipulations trigonométriques,
- Utiliser la transformation de Laplace – *plus tard dans l'année*.

II. Second ordre

II. 1) Présentation

Il s'agit d'une équation pouvant se mettre sous la forme :

$$(E) : a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t) \quad a \neq 0$$

Cette fois la méthode d'Euler reviendrait à procéder ainsi :

1. Connaissant $y(t)$ et $y'(t)$ à un certain temps, on déduit $y''(t)$.
2. On fait comme si y'' ne bouge pas pendant un temps court dt.
   Une courbe dont y'' est constant est une parabole (degré 2) d'où le nom (ordre 2)
   On approxime donc les valeurs de y et y' en progressant par petits morceaux de paraboles.

On le fera en TP si possible.

1. Résoudre (E_0) : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

Il faut résoudre l'équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
- Quand $\Delta = 0$, $y_0(t) = (A\,t + B)\mathrm{e}^{r_0\,t}$
- Quand $\Delta < 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
  mais aussi, avec : $r = a \pm ib$: $y_0 = \mathrm{e}^{a\,t}\,(A\cos(b\,t) + B\sin(b\,t))$

1. Résoudre (E_0) : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

Il faut résoudre l'équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
- Quand $\Delta = 0$, $y_0(t) = (A\,t + B)\mathrm{e}^{r_0\,t}$
- Quand $\Delta < 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
  mais aussi, avec : $r = a \pm ib$: $y_0 = \mathrm{e}^{a\,t}\,(A\cos(b\,t) + B\sin(b\,t))$

2. Il faut trouver une solution particulière de (E). On peut l'appeler y_1.

II. 2) Méthode

1. Résoudre (E_0) : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

Il faut résoudre l'équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, $y_0(t) = Ae^{r_1\,t} + Be^{r_2\,t}$
- Quand $\Delta = 0$, $y_0(t) = (A\,t + B)e^{r_0\,t}$
- Quand $\Delta < 0$, $y_0(t) = Ae^{r_1\,t} + Be^{r_2\,t}$
  mais aussi, avec : $r = a \pm ib$: $y_0 = e^{a\,t}\,(A\cos(b\,t) + B\sin(b\,t))$

2. Il faut trouver une solution particulière de (E). On peut l'appeler y_1.
3. La solution générale de (E) est de la forme $y = y_0 + y_1$

II. 2) Méthode

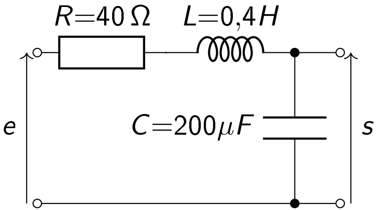
1. Résoudre (E_0) : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

Il faut résoudre l'équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.

- Quand $\Delta > 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
- Quand $\Delta = 0$, $y_0(t) = (A\,t + B)\mathrm{e}^{r_0\,t}$
- Quand $\Delta < 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
  mais aussi, avec : $r = a \pm ib$: $y_0 = \mathrm{e}^{a\,t}\,(A\cos(b\,t) + B\sin(b\,t))$

2. Il faut trouver une solution particulière de (E). On peut l'appeler y_1.
3. La solution générale de (E) est de la forme $y = y_0 + y_1$
4. On connaît $y(0)$ et $y'(0)$ ce qui permet de fixer A et B.

Exercice



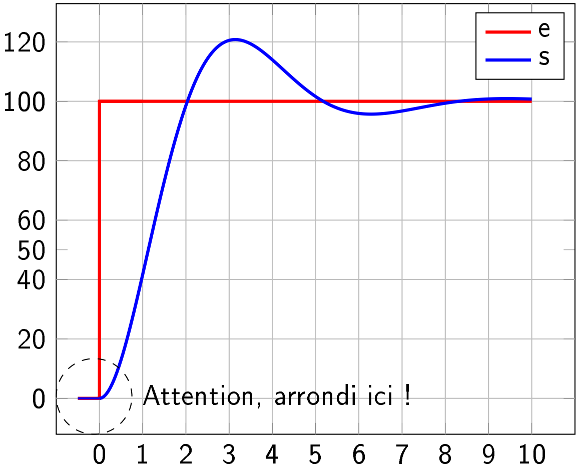
On obtient l'équation
(E) : $e = LCs'' + RCs' + s$.

Avec les données du problème :
(E) : $100 = 80\mu\, s'' + 8m\, s' + s$

Dans cette équation, $\mu = 10^{-6}$ et $m = 10^{-3}$

C'est une équation du **second ordre**.
Conditions initiales : $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

Courbe de la solution



$$s(t) = \mathrm{e}^{-50t}(-100\cos(100t) - 50\sin(100t)) + 100$$

Annale 2017

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle :

$(E) : \quad \dfrac{1}{4}y'' + y' + y = \dfrac{U}{k}$, où k est une valeur caractéristique du moteur

Annale 2017 : (E) : $\frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{U}{k}$

1. On note (E_0) l'équation sans second membre :
$$(E_0) : \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).
2. Vérifier que la fonction constante g : $\quad t \longmapsto \dfrac{U}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).
4. En prenant $k = \dfrac{2}{3}$ et $U = 10$ V montrer que la fonction ω donnée ci-dessous est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$$