Équations différentielles

Premier ordre

$$(E) : a\,y' + b\,y = f(t)$$

- Résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) : a\,y' + b\,y = 0 \Rightarrow y' = \alpha\,y$$

  C'est l'équation dont il ne reste que les termes en y et y'.

$$y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-\alpha\,t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

- Trouver une solution particulière de (E).
  On peut l'appeler y_1. Quand $f(t) = C^{ste}$, y_1 aussi.
- $y = y_1 + y_0$ est solution générale de (E).
- La condition initiale, souvent $y(0)$, permet de fixer K.

Second ordre

$$(E) : a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$$

- Résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) : a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

  C'est l'équation dont il ne reste que les termes en y, y' et y''.
  Pour cela, chercher les racines de $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.
  (a) Quand $\Delta > 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
  (b) Quand $\Delta = 0$, $y_0(t) = (A\,t + B)\mathrm{e}^{r_0\,t}$
  (c) Quand $\Delta < 0$, $y_0(t) = A\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\mathrm{e}^{r_2\,t}$
  Cette écriture est a priori complexe. Il faudrait alors bien choisir A et B pour s'assurer que y_0 reste réel. C'est en général plus simple d'adopter la formulation suivante qui garantit que y_0 sera réel avec A et B réels : $r = a \pm ib \Rightarrow y_0 = \mathrm{e}^{a\,t}\,(A\cos(b\,t) + B\sin(b\,t))$
- Trouver une solution particulière de (E).
  On peut l'appeler y_1. Quand $f(t) = C^{ste}$, y_1 aussi.
- $y = y_1 + y_0$ est solution générale de (E).
- Les conditions initiales, souvent $y(0)$ et $y'(0)$, permettent de fixer A et B.