Probabilités - Rappels des bases

UNIVERS Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat. On peut néanmoins connaître l'ensemble des résultats possibles.

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des **issues** possibles : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

PROBABILITÉ D'UNE ISSUE Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la **fréquence** f d'une issue **a tendance à se stabiliser**, lorsque n devient très grand, autour d'une valeur p. On appelle cette valeur p **probabilité de l'issue**.

- p est un nombre positif et inférieur ou égal à 1, c'est à dire : $0 \leqslant p \leqslant 1$.
- La somme des probabilités de toutes les issues fait 1.

Définir une **LOI DE PROBABILITÉ** sur l'univers Ω, c'est attribuer à chaque issue ω_i de Ω une probabilité $p_i \in [0;1]$. On a forcément $p_1 + p_2 + ...p_n = 1$.

Quand $p = \dfrac{1}{n}$ pour toutes les issues, on dit qu'il y a **ÉQUIPROBABILITÉ** .

PROBABILITÉ D'UNE ISSUE Un événement A est un sous-ensemble de Ω, c'est à dire $A \subset \Omega$. La probabilité de A est notée $p(A)$ et est la somme des probabilités des issues favorables à A. Comme Ω représente toutes les issues possibles, on a naturellement : $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$

En **SITUATION D'ÉQUIPROBABILITÉ** , la probabilité d'un événement A est :

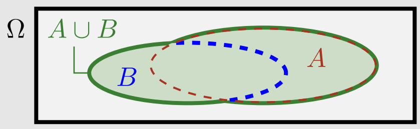
$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues total}}$$

$\overline{A}$ est le **COMPLÉMENTAIRE** de A dans Ω, c'est à dire que $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

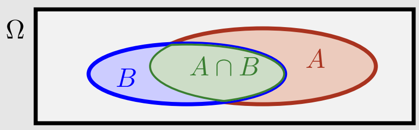
$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$$

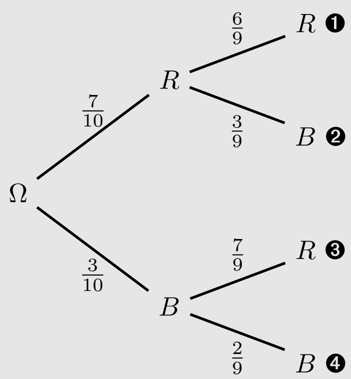
L'UNION de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui réalisent A **OU** B

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



L'INTERSECTION de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui réalisent A **ET** B. Si $p(A \cap B) = 0$, on dit que les événements A et B sont **incompatibles**. Cela revient à dire que $A \cap B = \varnothing$.





ARBRES (autour d'un exemple)
Dans une urne, 10 boules dont 7 rouges, 3 bleues. Deux tirages sans remise.

- Pour trouver la probabilité d'un chemin en particulier, il faut **multiplier les probabilités** sur ce chemin.
- Pour trouver la probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemin, il faut sommer les probabilités des différents chemins.

Exemple : Probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes. Ce sont les chemins ❷ et ❸ donc

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{14}{30}$$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE A et B sont deux événements. Il faut bien distinguer les deux cas suivants :

(a) « A et B sont réalisés » probabilité : $p(A \cap B)$

(b) « A est réalisé sachant que B est réalisé », probabilité : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.