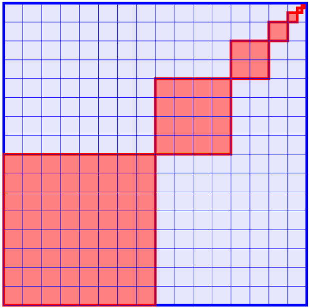


Suites réelles

Une fiche de cours vous est distribuée. Inutile de recopier le cours.

I. Définition

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 29\ ;\ 39\ ;\ 50\ ;\ 62\ ;\ 75\ ;\ 89\ ;\ 104\ ;\ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5 \ ; \ 12 \ ; \ 20 \ ; \ 29 \ ; \ 39 \ ; \ 50 \ ; \ 62 \ ; \ 75 \ ; \ 89 \ ; \ 104 \ ; \ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 29\ ;\ 39\ ;\ 50\ ;\ 62\ ;\ 75\ ;\ 89\ ;\ 104\ ;\ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

Exemple : Ici la suite commence avec 5. Disons que le premier terme soit numéroté 1, donc $u_1 = 5$

Dans ce cas :

1. Le terme de rang 2 est :
2. $u_5 =$
3. 104 est le terme de rang
4. $u_7 - u_6 =$

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5 \ ; \ 12 \ ; \ 20 \ ; \ 29 \ ; \ 39 \ ; \ 50 \ ; \ 62 \ ; \ 75 \ ; \ 89 \ ; \ 104 \ ; \ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

Autre choix : Le premier terme est numéroté 0, donc $u_0 = 5$

Dans ce cas :

1. Le terme de rang 2 est :
2. $u_5 =$
3. 104 est le terme de rang
4. $u_7 - u_6 =$

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 29\ ;\ 39\ ;\ 50\ ;\ 62\ ;\ 75\ ;\ 89\ ;\ 104\ ;\ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

Important

Il faut savoir quel est l'**indice du premier terme** de la suite !
(en général 0 ou 1)

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux $f : x \mapsto y$.

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore $u : n \mapsto y$.

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

Important

- Quand on veut parler de la suite dans son ensemble, on note (u_n)

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

Important

- Quand on veut parler de la suite dans son ensemble, on note (u_n)
- On peut préciser les valeurs de n possibles. Par exemple $(u_n)_{n>0}$ veut dire que le premier terme de la suite est u_1.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ dont les premiers termes sont :

$$17 \,;\, 42 \,;\, 26 \,;\, 12 \,;\, 1 \,;\, 0 \,;\, 11 \,;\, 5$$

a) Donnez le terme de rang 2
b) Donnez u_5
c) Donnez le rang d'un terme égal à 12

II. Expression d'une suite

II. 1) Suite donnée par une relation explicite

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n + 2$.

- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$$

II. 1) Suite donnée par une relation explicite

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n + 2$.

- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$$

- On peut faire un tableau de valeur :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	5	8	11	14

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n + 2$.

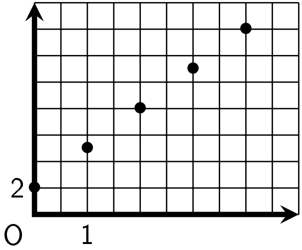
- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$$

- On peut faire un tableau de valeur :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	5	8	11	14

- On peut faire un graphique :
  Il ne faut pas relier les points !



Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :

$$u_n = f(n)$$

Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :
$$u_n = f(n)$$
- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f
(signe, variations...)

Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :

$$u_n = f(n)$$

- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f (signe, variations...)

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = 3n + 2$.

Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :
$$u_n = f(n)$$
- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f (signe, variations...)

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = 3n + 2$.

- Cela revient à $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x + 2$.

Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :

$$u_n = f(n)$$

- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f (signe, variations...)

Exemple

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = 3n + 2$.

- Cela revient à $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x + 2$.
- On reconnaît une fonction affine, croissante, on peut donc dire que (u_n) est croissante.

Exercices

Exercice 2 : $u_n = 2 + 3n$

a) Calculez u_{21}

b) Résoudre $u_n > 1\,000$

Exercice 3

a) Les premiers termes de $(u_n)_{n \geqslant 0}$ sont
$0\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 9\ ;\ 16\ ;\ 25\ ;\ \cdots$
Exprimez u_n.

b) Les premiers termes de $(v_n)_{n > 0}$ sont
$1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \cdots$
Exprimez v_n.

Exemple

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

Exemple

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

Attention

La notation est très importante.
Il faut bien écrire en **indice**.
Au pire, on peut utiliser une notation de fonction :

$$u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u(n+1) = 3u(n) + 1, \quad n \geqslant 0$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Déjà, on sait que $u_0 = 1$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Déjà, on sait que $u_0 = 1$
2. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Déjà, on sait que $u_0 = 1$
2. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:
$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$
3. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:
$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Déjà, on sait que $u_0 = 1$
2. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:
$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$
3. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:
$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$
4. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 2$:
$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

1. Déjà, on sait que $u_0 = 1$
2. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:
$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$
3. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:
$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$
4. On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 2$:
$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$$

$$1 \stackrel{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 4 \stackrel{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 13 \stackrel{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 40$$

Problème

Comment calculer u_{100} de cette façon ?

1. On prend le temps de tout calculer :
   $u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{99} \to u_{100}$. C'est long.

Problème

Comment calculer u_{100} de cette façon ?

1. On prend le temps de tout calculer :
   $u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{99} \to u_{100}$. C'est long.
2. On programme une machine

Problème

Comment calculer u_{100} de cette façon ?

1. On prend le temps de tout calculer :
   $u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{99} \to u_{100}$. C'est long.
2. On programme une machine
3. On trouve une formule qui donne directement u_n. Ici :

$$u_n = 1,5 \times 3^n - 0,5$$

   Mais ce n'est pas toujours possible.

Exercices

Exercice 4

Calculez u_3 dans les cas suivants :

a) $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + 7$

b) $u_0 = 100$ et pour $n \geqslant 0, u_{n+1} = 0,9\, u_n$

Exercice 5

Dans les deux cas suivants, déterminez si la suite est définie de façon récurrente ou explicite :

a) $u_n = 17 \cos(n\pi)$

b) $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{u_n}{2}$

Exercice 6 : Donnez la définition des suites suivantes

a) 7 ; 13 ; 19 ; 25 ; 31 ; $\cdots$

b) 4 ; 12 ; 36 ; 108 ; 324 ; $\cdots$

c) 5 ; 13 ; 29 ; 61 ; 125 ; $\cdots$

Variations

- $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ **croissante**.
- $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ **décroissante**.

Attention : Une suite peut être ni croissante, ni décroissante.

Variations

- $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ **croissante**.
- $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ **décroissante**.

Attention : Une suite peut être ni croissante, ni décroissante.

Comment choisir ?

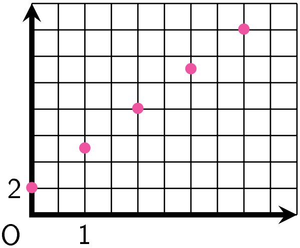
- On peut se contenter d'observer le **graphique** ou un **tableau de valeur**
- Si $u_n = f(n)$, on peut chercher $f'(x)$
- On peut calculer $u_{n+1} - u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$...

Exemple : cas explicite

$$u_n = 3n + 2$$

Exemple : cas explicite

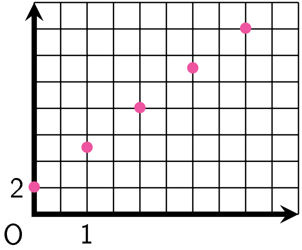
$$u_n = 3n + 2$$



La suite est manifestement **croissante**.

Exemple : cas explicite

$$u_n = 3n + 2$$



La suite est manifestement **croissante**.

On peut le prouver :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[3\left(n+1\right)+2\right] - \left[3n+2\right] \\ &= 3n + 5 - 3n - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

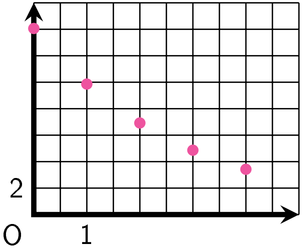
On conclut que $u_{n+1} > u_n$.

Exemple : cas récurrent

$$u_0 = 14, \quad u_{n+1} = 0,7 u_n$$

Exemple : cas récurrent

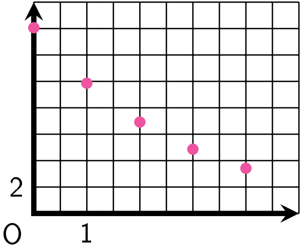
$$u_0 = 14, \quad u_{n+1} = 0,7u_n$$



La suite est manifestement **décroissante**.

Exemple : cas récurrent

$$u_0 = 14, \quad u_{n+1} = 0,7u_n$$

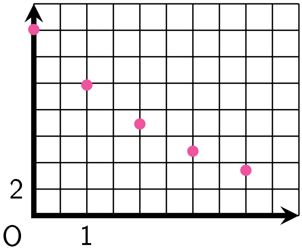


La suite est manifestement **décroissante**.

La preuve est plus difficile.
On utilise un raisonnement par récurrence
ne sera pas demandé en BTS

Exemple : cas récurrent

$$u_0 = 14, \quad u_{n+1} = 0,7u_n$$

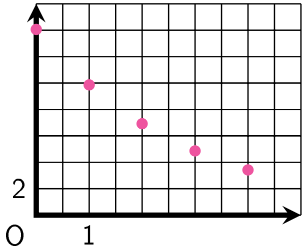


La suite est manifestement **décroissante**.

Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = 0,7u_n > 0$.
Comme $u_0 > 0$, alors u_1 aussi, alors u_2 aussi, alors u_3 aussi, etc.

Exemple : cas récurrent

$u_0 = 14, \quad u_{n+1} = 0,7u_n$



La suite est manifestement **décroissante**.

Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = 0,7u_n > 0$.
Comme $u_0 > 0$, alors u_1 aussi, alors u_2 aussi, alors u_3 aussi, etc.

Comme $u_n > 0$ on peut conclure :

$$0,7 < 1 \Rightarrow 0,7\,u_n < u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

II. 3) Étude de suite

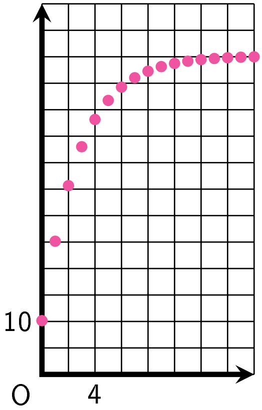
Convergence

Quand $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) **converge** vers ℓ.

Dans les autres cas, on dit que (u_n) **diverge**.

Exemple

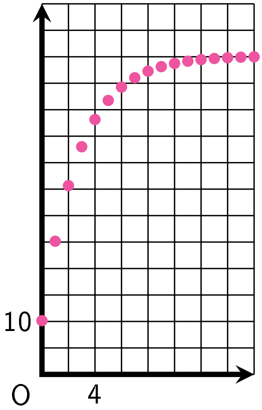
$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7\,u_n + 18$



La suite semble se stabiliser.

Exemple

$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7\, u_n + 18$



La suite semble se stabiliser.

On peut calculer :

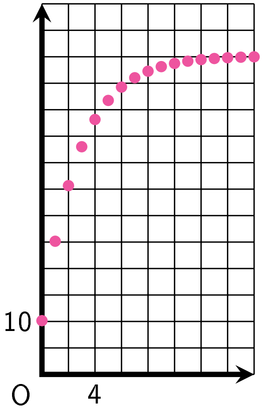
$u_{15} \simeq 59,763$

$u_{30} \simeq 59,999$

$u_{150} \simeq 60,000$

Exemple

$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7\, u_n + 18$



La suite semble se stabiliser.

On peut calculer :

$u_{15} \simeq 59,763$

$u_{30} \simeq 59,999$

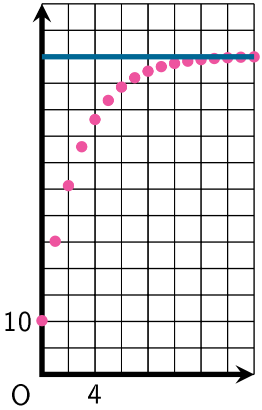
$u_{150} \simeq 60,000$

On peut prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 60$$

Exemple

$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7\,u_n + 18$



La suite semble se stabiliser.
On peut calculer :
$u_{15} \simeq 59,763$
$u_{30} \simeq 59,999$
$u_{150} \simeq 60,000$

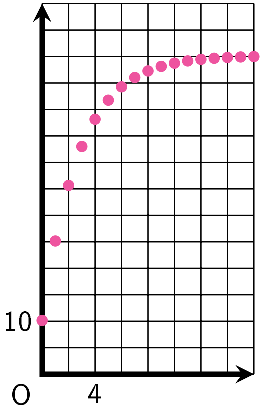
On peut prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 60$$

Graphiquement, il y a une asymptote.

Exemple

$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7\, u_n + 18$



La suite semble se stabiliser.
On peut calculer :
$u_{15} \simeq 59,763$
$u_{30} \simeq 59,999$
$u_{150} \simeq 60,000$

On peut prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 60$$

Graphiquement, il y a une asymptote.

On dit que u **converge** vers $\ell = 60$.
u_n devient aussi proche que l'on veut de ℓ.

Exercice 7

Dans tous les cas, précisez si la définition est explicite / récurrente, étudiez les variations et la convergence.

a) $u_n = n^2 + 2$ pour $n > 0$

b) $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n + 2}$ pour $n \geqslant 0$

c) $u_n = \dfrac{n + 1}{n}$ pour $n > 0$

d) $u_0 = 15$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 20$ pour $n \geqslant 0$

e) $u_n = (n + 2)^2 - n^2$ pour $n > 0$

f) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+2}}$ pour $n \geqslant 0$

g) $u_{n+1} = 1,1 u_n - 7$ et $u_0 = 3$

h) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Convergence : aussi proche que l'on veut...

u_n devient aussi proche de ℓ que l'on veut :

- On se fixe ε aussi petit que l'on veut
- À partir d'un certain N, les u_n et ℓ sont à une distance inférieure à ε

Convergence : aussi proche que l'on veut...

u_n devient aussi proche de ℓ que l'on veut :

- On se fixe ε aussi petit que l'on veut
- À partir d'un certain N, les u_n et ℓ sont à une distance inférieure à ε

Exemple : Dans le cas précédent, la limite est $\ell = 60$
mais **jamais** $u_n = 60$

Convergence : aussi proche que l'on veut...

u_n devient aussi proche de ℓ que l'on veut :

- On se fixe ε aussi petit que l'on veut
- À partir d'un certain N, les u_n et ℓ sont à une distance inférieure à ε

Exemple : Dans le cas précédent, la limite est $\ell = 60$
mais **jamais** $u_n = 60$

On peut se fixer un écart, aussi petit que l'on veut, par exemple $\varepsilon = 0,001$.
$u_{30} \simeq 59,9989$
$u_{31} \simeq 59,9992$
L'écart entre ℓ et u_n devient inférieur à ε pour $n \geqslant 31$.

Exercice 8

$u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 13$.

a) Déterminez $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

b) Déterminez à partir de quel rang on a $|u_n - \ell| < 10^{-4}$.

Divergence vers $+\infty$: aussi grand que l'on veut

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,1\, u_n$.

$(u_n) \nearrow$, mais jusqu'où ?

Divergence vers $+\infty$: aussi grand que l'on veut

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,1\, u_n$.

$(u_n) \nearrow$, mais jusqu'où ?

On peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$+\infty$ n'est pas un nombre. C'est plutôt une **idée**, l'idée d'une **quantité aussi grande que l'on veut**.

Autrement dit, $u_n \nearrow$ aussi grand que l'on veut.

Divergence vers $+\infty$: aussi grand que l'on veut

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,1\, u_n$.

$(u_n) \nearrow$, mais jusqu'où ?

On peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

$+\infty$ n'est pas un nombre. C'est plutôt une **idée**, l'idée d'une **quantité aussi grande que l'on veut**.

Autrement dit, $u_n \nearrow$ aussi grand que l'on veut.

Exemple : On se fixe un nombre grand, comme $M = 1\,000$.
$u_{72} \simeq 955,6$
$u_{73} \simeq 1\,051,2$
Pour $n \geqslant 73$, $u_n > M$.

Exercice 9

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 1,3\, u_n + 2$.
Trouvez le rang à partir duquel $u_n > 1\,000\,000$.

III. Suites arithmétique

Définition

(u_n) est une suite arithmétique si pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + r, r \in \mathbb{R}$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite

Exemple

$u_0 = 2$; $u_1 = 5$; $u_2 = 8$; $\cdots$ est une suite **arithmétique** de raison 3.

III. 2) Terme général

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors, si u_0 est défini :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

En général, pour un entier ℓ quelconque :

$$u_n - u_\ell = (n - \ell) \cdot r$$

Exemple

Si $u_0 = 7$ et $r = 11$ alors $u_n = 7 + 11n$.
On peut alors calculer directement $u_{10} = 7 + 11 \times 10 = 117$.

Exemple

Si $u_0 = 7$ et $r = 11$ alors $u_n = 7 + 11n$.
On peut alors calculer directement $u_{10} = 7 + 11 \times 10 = 117$.

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique avec $u_0 = 15$ et $u_{100} = 325$. Que vaut la raison r ?

Exemple

Si $u_0 = 7$ et $r = 11$ alors $u_n = 7 + 11n$.
On peut alors calculer directement $u_{10} = 7 + 11 \times 10 = 117$.

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique avec $u_0 = 15$ et $u_{100} = 325$. Que vaut la raison r ?

$$u_{100} = u_0 + 100r \Leftrightarrow 325 = 15 + 100r \Leftrightarrow r = \frac{325 - 15}{100} = 3,1$$

Prenons une suite arithmétique :

$$7; \quad 11; \quad 15; \cdots; \quad 87$$

Prenons une suite arithmétique :

$$7; \quad 11; \quad 15; \cdots; \quad 87$$

Considérons cette somme à l'envers et à l'endroit :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} S = & 7 & + & 11 & + & 15 & + & \cdots & + & 83 & + & 87 \\ S = & 87 & + & 83 & + & 79 & + & \cdots & + & 11 & + & 7 \end{array}$$

III. 3) Somme

Prenons une suite arithmétique :

$$7; \quad 11; \quad 15; \cdots; \quad 87$$

Considérons cette somme à l'envers et à l'endroit :

$$\begin{array}{rrcrcrcccrcr}
S = & 7 & + & 11 & + & 15 & + & \cdots & + & 83 & + & 87 \\
S = & 87 & + & 83 & + & 79 & + & \cdots & + & 11 & + & 7 \\
2S = & 94 & + & 94 & + & 94 & + & \cdots & + & 94 & + & 94
\end{array}$$

$$2S = \text{Nbre termes} \times [\text{Permier} + \text{Dernier}]$$

Exercice 10

Précisez le premier terme, la raison, récurrence et terme général, et enfin la somme des 10 premiers termes.

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ pour $n \geqslant 0$

b) $u_n = 17n - 4$ pour $n \geqslant 0$

IV. Suite géométrique

IV. 1) Définition

Définition

On appelle **suite géométrique** une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

IV. 1) Définition

Définition

On appelle **suite géométrique** une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$. On a alors :

$u_1 = 3 \times u_0 = 3$

$u_2 = 3 \times u_1 = 9$

$u_3 = 3 \times u_2 = 27$

$u_4 = 3 \times u_3 = 81$

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} 81 \xrightarrow{\times 3} \cdots$$

On peut ainsi calculer n'importe quel terme de la suite.

Méthode

Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.
Le nombre trouvé est la raison q.

Méthode

Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.
Le nombre trouvé est la raison q.

exemple

$$u_n = 4 \times 2^n, n \in \mathbb{N}$$

On a alors $u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1}$ et donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 2^{n+1}}{4 \times 2^n} = 2$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 2$. Son premier terme est $u_0 = 4 \times 2^0 = 4$.

IV. 2) Terme général

Propriété

soit (u_n) une suite géométrique de raison q ;

$$u_n = u_\ell \times q^{n-\ell}$$

Exemple

Avec la suite suivante de raison 3, on a $u_5 = u_1 \times 3^{5-1}$:

$$1 \xrightarrow{\times 3} \underbrace{3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} 81 \xrightarrow{\times 3} 243}_{\times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \times 3^4} \xrightarrow{\times 3} \cdots$$

Propriété

$$u_n = u_0 \times q^{n-0} \Rightarrow u_n = u_0 \times q^n$$

C'est l'expression du terme général de la suite (u_n).

Remarque : Il faut adapter la formule si la suite commence avec u_1.

Exemple : Soit une quantité Q qui augmente toutes les 30 minutes de 3 %. À l'instant initial, $Q = 80$.

- On définit Q_n la quantité Q au bout de n demi-heures.

IV. 3) Pourcentage

Exemple : Soit une quantité Q qui augmente toutes les 30 minutes de 3 %. À l'instant initial, $Q = 80$.

- On définit Q_n la quantité Q au bout de n demi-heures.
- $Q_0 = 80$

Exemple : Soit une quantité Q qui augmente toutes les 30 minutes de 3 %. À l'instant initial, $Q = 80$.

- On définit Q_n la quantité Q au bout de n demi-heures.
- $Q_0 = 80$
- $Q_{n+1} = 100\,\%\, Q_n + 3\,\%\, Q_n = 103\,\%\, Q_n = 1,03\ Q_n$

Exemple : Soit une quantité Q qui augmente toutes les 30 minutes de 3 %. À l'instant initial, $Q = 80$.

- On définit Q_n la quantité Q au bout de n demi-heures.
- $Q_0 = 80$
- $Q_{n+1} = 100\,\%\,Q_n + 3\,\%\,Q_n = 103\,\%\,Q_n = 1,03\;Q_n$
- On déduit que (Q_n) est géométrique de premier terme $Q_0 = 80$ et de raison $q = 1,03$.

IV. 3) Pourcentage

Exemple : Soit une quantité Q qui augmente toutes les 30 minutes de $3\,\%$. À l'instant initial, $Q = 80$.

- On définit Q_n la quantité Q au bout de n demi-heures.
- $Q_0 = 80$
- $Q_{n+1} = 100\,\%\,Q_n + 3\,\%\,Q_n = 103\,\%\,Q_n = 1,03\,Q_n$
- On déduit que (Q_n) est géométrique de premier terme $Q_0 = 80$ et de raison $q = 1,03$.
- On déduit que le terme général est $Q_n = Q_0\,q^n = 80 \times 1,03^n$

IV. 4) Somme des termes

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$. On souhaite calculer :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

IV. 4) Somme des termes

Exemple

On considère une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$. On souhaite calculer :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

On peut calculer :

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	10
u_n	1	2	4	8	16	$\cdots$	1024

Puis on peut faire la somme. **Mais c'est long** et **on peut avoir des problèmes avec les arrondis (quand q n'est pas entier)**.

Principe du calcul

On va donner l'idée du raisonnement qui mène à la formule :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 512 + 1024$$

Principe du calcul

On va donner l'idée du raisonnement qui mène à la formule :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 512 + 1024$$

Si on multiplie tout par 2 :

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 + 2048$$

Principe du calcul

On va donner l'idée du raisonnement qui mène à la formule :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 512 + 1024$$

Si on multiplie tout par 2 :

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 + 2048$$

Puis on soustrait le premier par le second :

$$S - 2S = 1 - 2048 \Leftrightarrow S = \frac{1 - 2048}{1 - 2} = 2047$$

Formule

Somme des termes d'une suite géométrique

En général, si (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$S = \sum_i u_i = \binom{\text{premier terme}}{\text{de la somme}} \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$$

Formule

Somme des termes d'une suite géométrique

En général, si (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$S = \sum_i u_i = \begin{pmatrix}\text{premier terme} \\ \text{de la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$$

Exemple

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = 1,5$.
On cherche la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{15}$.

Formule

Somme des termes d'une suite géométrique

En général, si (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$S = \sum_i u_i = \begin{pmatrix}\text{premier terme} \\ \text{de la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$$

Exemple

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = 1,5$.
On cherche la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{15}$.

- Premier terme à sommer : $u_3 = u_0 q^3 = 54$

Formule

Somme des termes d'une suite géométrique

En général, si (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$S = \sum_i u_i = \begin{pmatrix}\text{premier terme}\\ \text{de la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-(\text{raison})}$$

Exemple

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = 1,5$.
On cherche la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{15}$.

- Premier terme à sommer : $u_3 = u_0 q^3 = 54$
- Nombre de termes à sommer : 13 termes

Formule

Somme des termes d'une suite géométrique

En général, si (u_n) est une suite géométrique, on a :

$$S = \sum_i u_i = \begin{pmatrix}\text{premier terme}\\ \text{de la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-(\text{raison})}$$

Exemple

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = 1,5$.
On cherche la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{15}$.

- Premier terme à sommer : $u_3 = u_0 q^3 = 54$
- Nombre de termes à sommer : 13 termes

$$S = 54 \times \frac{1-1,5^{13}}{1-1,5} \approx 20\ 910,91$$

Exercice 11

Précisez le premier terme, la raison, récurrence et terme général, et enfin la somme des 10 premiers termes.

a) $u_0 = 16$ et $u_{n+1} = 1,04u_n$ pour $n \geqslant 0$

b) $u_n = 2 \cdot 3^n$ pour $n \geqslant 0$